Übungen zur Stochastik III — SS 2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 0

Aufgabe 0.1 (vgl. auch Aufg. 13.4 aus dem WS 2011/2012) Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ Brownsche Bewegung, $t > 0$, für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ sei $s(n,m) := tm/2^n$ und $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$.

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\Big)^2\Big] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung, um aus der linken Abschätzung zu folgern, dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\big|\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\big| > \varepsilon\Big) < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$, dann ein Borel-Cantelli-Lemma.]

b) Folgern Sie: Für $\gamma > 1/2$ ist

$$\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} \frac{|B_v - B_u|}{(v-u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. die Pfade sind auf $[0,t]$ f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung γ.

[*Hinweis.* Auf dem Ereignis $\big\{\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} |B_v - B_u|/(v-u)^\gamma < c\big\}$ gilt $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 \leqslant 2^n \times (ct^\gamma 2^{-n\gamma})^2 = c^2 t^{2\gamma} 2^{n(1-2\gamma)}$, was a) widerspricht.]

Aufgabe 0.2 Sei $(N_t)_{t\geqslant 0}$ ein Poissonprozess mit Rate λ (d.h. (N_t) hat unabhängige Zuwächse mit $N_t - N_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ für $s < t$) und $N_0 = 0$. Seien

$$M_t := N_t - \lambda t, \qquad \tilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t.$$

Zeigen Sie: $(M_t)_{t\geqslant 0}$ und $(\tilde{M}_t)_{t\geqslant 0}$ sind Martingale (bezüglich der von (N_t) erzeugten Filtration).

Aufgabe 0.3

a) (vgl. auch Aufg. 13.3 aus dem WS 2011/2012) Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ Standard-Brownsche Bewegung. $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal und für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}\big(B_\tau = b\big) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

b) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int x\,\mu(dx) = 0$ und $\sigma^2 := \int x^2\,\mu(dx) \in (0,\infty)$. Wir definieren ein Maß $\tilde{\mu}$ auf $(-\infty,0] \times [0,\infty)$ durch

$$\tilde{\mu}(dx\,dy) := \mu(0)\delta_{(0,0)}(dx\,dy) + \frac{1}{c}(y-x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\mu(dx)\mu(dy)$$

wobei $c = \int_{(0,\infty)} x\,\mu(dx) = -\int_{(-\infty,0)} x\,\mu(dx)$. Prüfen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und dass gilt

$$\mu = \int_{(-\infty,0]\times[0,\infty)} \Big(\frac{y}{y-x}\delta_x - \frac{x}{y-x}\delta_y\Big)\,\tilde{\mu}(dx\,dy)$$

(wobei wir für $x = y = 0$ den Integranden als δ_0 interpretieren).

c) (Skorohods Einbettungssatz) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß wie in b). Zeigen Sie: Es gibt einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ und darauf eine Standard-Brownbewegung $(B_t)_{t\geqslant 0}$ sowie eine Stoppzeit τ mit

$$\mathcal{L}(B_\tau) = \mu \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[\tau] = \sigma^2.$$

Aufgabe 0.4* (Lévys Konstruktion der Brownschen Bewegung) Wir konstruieren eine Brownsche Bewegung B auf dem Intervall $[0,1]$, indem wir die (zufälligen) Funktionswerte $B(d)$ für dyadische Punkte $d \in \mathcal{D}_n := \{\frac{k}{2^n} : \ 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}$ schrittweise bestimmen und die Funktion dazwischen linear interpolieren. Sei dazu $\mathcal{D} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ und $(Z_d)_{d \in \mathcal{D}}$ eine Familie unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen. Für $d \in \mathcal{D}$ definieren wir nun induktiv $B(d)$:

- Auf $\mathcal{D}_0$ definieren wir B durch $B(0) := 0$ und $B(1) := Z_1$;
- Angenommen wir haben B bereits auf $\mathcal{D}_{n-1}$ definiert. Dann sei $B(d)$ für $d \in \mathcal{D}_n \backslash \mathcal{D}_{n-1}$ folgendermaßen definiert

$$B(d) := \frac{1}{2}\left[B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})\right] + 2^{-(n+1)/2} Z_d.$$

Zeigen Sie, dass $(B(t))_{t \in \mathcal{D}}$ f.s. zu einer stetigen Funktion $(B(t))_{t \in [0,1]}$ auf $[0,1]$ fortgesetzt werden kann, und dass dies tatsächlich eine Standard-Brownbewegung (eingeschränkt auf $[0,1]$) ist.

[*Hinweis.* Sie können diese Aufgabe als Einladung auffassen, beispielsweise den sehr gut lesbaren Beweis in Kapitel 1.1.2 des Buches von Peter Mörters und Yuval Peres *Brownian motion*, Cambridge University Press, 2010 anzuschauen. Das Buch ist auch in elektronischer Form auf der Homepage eines der Autoren erhältlich: `http://people.bath.ac.uk/maspm/book.pdf`]

Abgabe der Aufgaben: Keine