Übungen zur Stochastik III **SS 2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 1

Aufgabe 1.1 Seien $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ gegeben durch $H_t = \sum_{k\geqslant 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k,\tau_{k+1}]}(t)$ (mit einer Stoppzeitenfolge $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ ohne Häufungspunkt im Endlichen und ξ_k beschränkt, $\mathcal{F}_{\tau_k}$-messbar) und analog J mit $J_t = \sum_{k\geqslant 1} \eta_k \mathbf{1}_{(\sigma_k,\sigma_{k+1}]}(t)$ elementare Integranden, sowie $M \in \mathcal{M}_2^c$.

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^t (aH_s + bJ_s)\, dM_s = a\int_0^t H_s\, dM_s + b\int_0^t H_s\, dM_s, \quad t \geqslant 0,$$

d.h. das elementare stochastische Integral bezüglich M ist linear.

b) Für $t \geqslant s \geqslant 0$ gilt (mit $\int_s^t H\, dM := \int_0^t H\, dM - \int_0^s H\, dM$)

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t H\, dM \int_s^t K\, dN \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u K_u\, d\langle M, N\rangle_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst Integranden, die nur aus einer Stufe bestehen, d.h. $H_t = \xi \mathbf{1}_{(\tau,\tau']}(t)$ mit $\tau \leqslant \tau' < \infty$ Stoppzeiten und $\mathcal{F}_\tau$-messbarem, beschränktem ξ.]

Aufgabe 1.2 Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t\geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s\wedge t} f^2(u)\, du, \quad s, t \geqslant 0.$$

$M_t := \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}c(t,t)\right)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]

Aufgabe 1.3 Wir betrachten in der Vorlesung Eigenschaften des stochastischen Integrals bezüglich einem stetigen lokalen Martingal. Beweisen Sie einige oder alle davon:

Seien $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^c$, $X \in \mathcal{P}(M)$, $Y \in \mathcal{P}(N)$.

1. $\int_0^0 X\, dM = 0$
2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\int_0^t (aX + bY)\, dM = a\int_0^t X\, dM + b\int_0^t Y\, dM$, $t \geqslant 0$ (f.s.)
3. $\langle \int_0^\cdot X\, dM\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$, $t \geqslant 0$ und $\langle \int_0^\cdot X\, dM, \int_0^\cdot Y\, dN\rangle_t = \int_0^t X_s Y_s d\langle M, N\rangle_s$, $t \geqslant 0$ (f.s.)
4. Für jede Stoppzeit τ und $\tilde{X}_t := X_t \mathbf{1}(t \leqslant \tau)$ gilt $\int_0^{t\wedge\tau} X\, dM = \int_0^t \tilde{X}\, dM$, $t \geqslant 0$ (f.s.)

Aufgabe 1.4* Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Submartingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, der den üblichen Bedingungen genügt. Zeigen Sie: Wenn $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ rechtsstetig ist, so gibt es eine Version $\widetilde{X}$ von X mit rechtsstetigen Pfaden (d.h. $\mathbb{P}(\widetilde{X}_t = X_t) = 1$ für alle $t \geqslant 0$ und $t \mapsto \widetilde{X}_t$ ist rechtsstetig). Insbesondere besitzt ein Martingal eine rechtsstetige Version.

[*Hinweis.* Rat und Hilfe finden Sie beispielsweise bei Revuz & Yor, Kap. II, §2.]

Abgabe der Aufgaben: Keine