Übungen zur Stochastik III **SS 2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 3

Aufgabe 3.1 a) Sei (B_t) Standard-Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$, für $a \in \mathbb{R}$ sei $\tau_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$. Zeigen Sie:

$$(\tau_a)_{a \geqslant 0} \text{ hat stationäre, unabhängige Zuwächse,}$$

für $\lambda \geqslant 0$ gilt $\mathbb{E}\big[e^{-\lambda \tau_a}\big] = \exp(-a\sqrt{2\lambda})$ und für $c > 0$ ist $(\tau_{ac}/c^2)_{a \geqslant 0} =^d (\tau_a)_{a \geqslant 0}$.

[*Hinweis.* B besitzt die starke Markov-Eigenschaft. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\big(\exp\big(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\big)\big)_{t \geqslant 0}$ ein Martingal.]

b) Sei $(B_t)_{t \geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung, $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t^{(2)} = 0\}$ der Zeitpunkt des Auftreffens auf der x-Achse. Bei Start in $(B_0^{(1)}, B_0^{(2)}) = (x_0, y_0)$ mit $y_0 \neq 0$ besitzt die Verteilung von $B_\tau^{(1)}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie Teil a) und die Tatsache, dass $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ unabhängig sind, um $\mathbb{E}\big[\exp(i\lambda B_\tau^{(1)})\big]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.]

c) Sei $\alpha \in (0, \pi)$, $K_\alpha := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x > y/\tan(\alpha)\big\}$ ein Kegel mit Öffnungswinkel α, $(B_t)_{t \geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung, $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \partial K_\alpha\}$ der Zeitpunkt des Auftreffens im Kegelrand. Für $(x,y) \in K_\alpha$, $p > 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{(x,y)}\Big[||(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})||^p\Big] < \infty \quad \iff \quad p\alpha < \pi$$

(Wenn Sie möchten, können Sie auch die Verteilung von $(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})$ explizit bestimmen.)

[*Hinweis.* Fassen Sie K_α als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, die Abbildung $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ bildet K_α konform auf die obere Halbebene ab.]

Aufgabe 3.2 Geben Sie ein Beispiel für ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t \geqslant 0}$ an (d.h. es gilt $\sup_{t \geqslant 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$), das kein Martingal ist.

[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. eine dreidimensionale Brownsche Bewegung (B_t) mit Startpunkt $B_0 \neq 0$ und untersuchen Sie $M_t = 1/||B_t||$. Sie können die Verteilung von $||B_t||$ und damit auch von M_t leicht explizit bestimmen, wenn Sie annehmen, dass B_0 dreidimensional standard-normalverteilt ist, oder Sie können bei festem Startpunkt $B_0 = x \neq 0$ die auftretenden Integrale „grob von Hand“ abschätzen.]

Aufgabe 3.3 Bestimmen Sie im Black-Scholes-Merton-Modell (mit instantanem Renditeparameter μ, Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate r) die fairen Preise der europäischen Optionen mit Laufzeit T und Auszahlungsprofilen (für einen gewissen „Ausübungspreis“ $K > 0$)

$$h_1(S_T) = (K - S_T)^+, \quad h_2(S_T) = S_T \wedge K, \quad h_3(S_T) = |S_T - K|, \quad h_4(S_T) = \big(K - |S_T - K|\big)^+$$

(im Jargon sind dies Put, Covered Call, Straddle und Butterfly).

[*Hinweis.* Stellen Sie die Auszahlungsprofile als geeignete Linearkombinationen von S_T und Call-Optionen dar. Man kann alle Preisformeln im Prinzip explizit machen (als algebraische Ausdrücke, die die Verteilungsfunktion der Normalverteilung beinhalten), für eine übersichtliche Darstellung mag es angenehmer zu sein, den Preis einer Call-Option als „Elementarfunktion“ zu betrachten.]

Abgabe der Aufgaben: Keine