Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 2

Aufgabe 2.1 Sei $\alpha > 0$. Können Sie ein Beispiel eines reellwertigen stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\geqslant 0}$ mit rechtsstetigen Pfaden finden, für den

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^\alpha\big] \leqslant C|t-s|, \quad s,t \in [0,\infty)$$

mit einem $C < \infty$ gilt, der aber *keine* stetige Modifikation besitzt?
[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. $X_t = \mathbb{1}_{\{t<Y\}}$ für eine geeignet gewählte reelle ZV Y.]

Aufgabe 2.2 Sei $(W_t)_{t\geqslant 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung. $B_t := W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$. Beweisen Sie einige (oder wenn Sie möchten auch alle) der folgenden Aussagen:

1. $(B_t)_{t\in[0,1]}$ ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion
$$\mathrm{Cov}[B_s, B_t] = (s \wedge t)(1-(s \vee t)), \quad s,t \in [0,1].$$
($(B_t)_{t\in[0,1]}$ ist eine *Brownsche Brücke.*)
2. $(B_t)_{t\in[0,1]}$ und W_1 sind unabhängig.
3. $\mathcal{L}\big((W_t)_{0\leqslant t\leqslant 1} \,\big|\, |W_1| < \varepsilon\big) \Longrightarrow \mathcal{L}\big((B_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}\big)$ für $\varepsilon \to 0$.
4. $\big((1+t)B_{t/(1+t)}\big)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} \big((1+t)B_{1/(1+t)}\big)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} (W_t)_{t\geqslant 0}$.
5. Sei $\widetilde{B}_t := (1-t)W_{t/(1-t)}$, $t \in [0,1]$. Es gilt $(B_t)_{t\in[0,1]} \stackrel{d}{=} (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}$
6. Zeitumkehr: $\widetilde{W}_t := W_{1-t} - W_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist ebenfalls BB, weiterhin ist $(B_t)_{t\in[0,1]} \stackrel{d}{=} (B_{1-t})_{t\in[0,1]}$.
7. Sei $X_t := e^{-t}W_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}$. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}[X_s, Y_t] = \exp(-|t-s|)$. X ist stationär, d.h. $X =^d (X_t)_{t+h\in\mathbb{R}}$ für jedes $h \in \mathbb{R}$.
(X ist ein (stationärer) *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.*)

Aufgabe 2.3 In dieser Aufgabe geht es darum zu zeigen, dass die Pfade der Brownschen Bewegung fast sicher nirgends differenzierbar sind. Sei $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung, für $a, T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$D_{a,T} := \big\{f \in C([0,\infty)) : f \text{ ist an einer Stelle } t < T \text{ differenzierbar mit } |f'(t)| < a\big\},$$
$$L_{a,T,n} := \bigcup_{1\leqslant k<nT} \bigcap_{\ell=1}^{5} \Big\{f \in C([0,\infty)) : \big|f\big(\tfrac{k+\ell}{n}\big) - f\big(\tfrac{k+\ell-1}{n}\big)\big| \leqslant \frac{10a}{n}\Big\}.$$

Zeigen Sie:

1. $D_{a,T} \subset \widetilde{D}_{a,T} := \displaystyle\bigcap_{m\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant m} L_{a,T,n}$,
2. $\mathbb{P}(W \in L_{a,T,n}) \leqslant Tn\big(10a/\sqrt{n}\big)^5$,
3. und folgern Sie, dass $\mathbb{P}(W \in D_{a,T}) = 0$.