Ausgewählte Kapitel der Stochastik SS 2015

Blatt 3

Aufgabe 3.1 Sei $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. $N_0 = 0$, N hat unabhängige Inkremente ($N_{t+h} - N_t$ ist u.a. von $\mathcal{F}_t := \sigma(N_s : s \leqslant t)$ für $t, h \geqslant 0$), $N_{t+h} - N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda h)$ für $t \geqslant 0, h > 0$.

Dann ist $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal, und ebenso $\widetilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t$, $t \geqslant 0$.

Aufgabe 3.2 a) Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ standard-Brownsche Bewegung, $\mathcal{Z} := \{t \geqslant 0 : B_t = 0\}$ ihre Nullstellenmenge und λ das Lebesgue-Maß (auf $\mathbb{R}_+$). Es gilt

$$\lambda(\mathcal{Z}) = 0 \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\lambda(\mathcal{Z})]$.]

Weiterhin ist

$\mathcal{Z}$ *perfekt*, d.h. $\mathcal{Z}$ ist abgeschlossen und besitzt keine isolierten Punkte (f.s.).

[*Hinweis.* Sei $R_t := \inf\{u > t : B_u = 0\}$, zeigen Sie mittels der starken Markov-Eigenschaft, dass für jedes $t > 0$ gilt $\mathbb{P}\big(\inf\{s > 0 : B_{R_t+s} = 0\} > 0 \,\big|\, \mathcal{F}_{R_t}\big) = 0$ und folgern Sie

$$\mathbb{P}\Big(\exists\, t, \delta \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \,:\, B_s \neq 0 \text{ für } s \in (R_t, R_t + \delta)\Big) = 0.$$

Folgern Sie weiter: Wenn $0 < u \in \mathcal{Z}$ von links isoliert ist (d.h. es gibt $t \in \mathbb{Q}_+$ mit $(t, u) \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, so gibt es eine strikt absteigende Folge $(u_n)_n \subset \mathcal{Z}$ mit $u_n \downarrow u$.]

Bem.: Perfekte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind überabzählbar, vgl. z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Thm. (6.65).

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $0 < \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie: Für $t \in (0, 1)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\max\{m < n : S_m S_{m+1} < 0\} \leqslant nt\Big) = \frac{2}{\pi} \arcsin\big(\sqrt{t}\big)$$

[*Hinweis.* Es liegt nahe, die Aussage mittels Donskers Invarianzprinzip aus dem Arcussinus-Gesetz für die Brownsche Bewegung herzuleiten.

Betrachten Sie $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := \sup\{0 \leqslant t \leqslant 1 : f(t) = 0\}$. φ ist nicht stetig auf $C([0,1])$, aber wenn $f \in C([0,1])$ in jeder Umgebung von $\varphi(f)$ strikt positive und strikt negative Werte annimmt, so ist f ein Stetigkeitspunkt von φ. Verwenden Sie Teil a) um zu zeigen, dass der Pfad einer Brownschen Bewegung mit W'keit 1 ein Stetigkeitspunkt von φ ist.]

Aufgabe 3.3 (Zur Schwierigkeit eines „naiven“ stochastischen Integrals, etwa bezüglich der Brownschen Bewegung). Sei $g \in C([0,1])$, für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n-1} f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big).$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) \in \mathbb{R} \text{ existiert für jedes } f \in C([0,1]) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big|g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big| < \infty.$$

[*Hinweis.* Fassen Sie die Frage funktionalanalytisch auf: $X := C([0,1])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$, ist ein Banachraum, ebenso $Y := \mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Betrag, $S_n : X \to Y$ ist ein stetiger linearer Operator.

b.w.

Der Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Cor. (14.24)) besagt: Wenn für jedes $f \in X$ gilt $\sup_n |S_n(f)| < \infty$, so gilt auch $\sup_n ||S_n|| < \infty$, wobei $||S_n|| := \sup_{f \in X,\, f \neq 0} |S_n(f)|/||f||_\infty$ die Abbildungsnorm von S_n bezeichnet.

Konstruieren Sie für jedes n ein $f_n \in C([0,1])$ mit $f_n(k/2^n) = \operatorname{sgn}\big(g\big(\frac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\frac{k}{2^n}\big)\big)$ und $||f_n||_\infty \leqslant 1$, was ist dann $S_n(f_n)$?]

Aufgabe 3.4 Seien $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ gegeben durch $H_t = \sum_{k \geqslant 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ (mit einer Stoppzeitenfolge $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ ohne Häufungspunkt im Endlichen und ξ_k beschränkt, $\mathcal{F}_{\tau_k}$-messbar) und analog J mit $J_t = \sum_{k \geqslant 1} \eta_k \mathbf{1}_{(\sigma_k, \sigma_{k+1}]}(t)$ elementare Integranden, sowie $M \in \mathcal{M}_2^c$.

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^t (aH_s + bJ_s)\, dM_s = a \int_0^t H_s\, dM_s + b \int_0^t H_s\, dM_s, \quad t \geqslant 0,$$

d.h. das elementare stochastische Integral bezüglich M ist linear.

b) Für $t \geqslant s \geqslant 0$ gilt (mit $\int_s^t H\, dM := \int_0^t H\, dM - \int_0^s H\, dM$)

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t H\, dM \int_s^t K\, dN \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u K_u\, d\langle M, N\rangle_u \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst Integranden, die nur aus einer Stufe bestehen, d.h. $H_t = \xi \mathbf{1}_{(\tau, \tau']}(t)$ mit $\tau \leqslant \tau' < \infty$ Stoppzeiten und $\mathcal{F}_\tau$-messbarem, beschränktem ξ.]