Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 4

Aufgabe 4.1 Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,\mathbb{P}\big(B_s \leqslant 1 \text{ für alle } 0 \leqslant s \leqslant t\big) = \sqrt{2/\pi}.$$

Aufgabe 4.2 Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t\geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\,dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \operatorname{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s\wedge t} f^2(u)\,du, \quad s,t \geqslant 0.$$

$M_t := \exp\big(Z_t - \frac{1}{2}c(t,t)\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]