Ausgewählte Kapitel der Stochastik $\hfill$ SS 2015

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (Konvergenz eines reskalierten kritischen Galton-Watson-Prozesses)
[*Globalhinweis.* Rat und Hilfe rund um das Thema dieser Aufgabe finden Sie beispielsweise in Kap. 21.9 des Buches von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer, 2006.]

Seien $\xi_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$ u.i.v., $\sim$ geom(1/2) (geometrisch mit Parameter 1/2), d.h. $\mathbb{P}(\xi_{1,1} = k) = 2^{-k-1}$, $k = 0, 1, \dots$ mit erzeugender Funktion $\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(\xi_{1,1} = k) = \frac{1}{2-s}$. Beginnend mit einem vorgegebenem Startwert z_0 von Z_0 definieren wir rekursiv eine Folge von Zufallsgrößen

$$Z_{n+1} := \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{n,j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($(Z_n)_n$ ist ein sogenannter Galton-Watson-Prozess [mit kritischer, geometrischer Kinderzahlverteilung], wir interpretieren Z_n als die Größe einer Population in der n-ten Generation und $\xi_{n,j}$ als die Anzahl der Nachkommen des j-ten Individuums in der n-ten Generation.)

a) $(Z_n)_n$ ist eine diskrete Markovkette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangsmatrix

$$p(i,j) = \mathrm{geom}(1/2)^{*i}(\{j\}) = \binom{i+j-1}{i-1} 2^{-(i+j)}.$$

[*Hinweis.* Die i-fache Faltung einer geometrischen Verteilung ergibt eine negative Binomialverteilung.]

b) Die Markovkette $(Z_n)_n$ besitzt die sog. *Verzweigungseigenschaft*: Seien $(Z_n)_n$ und $(Z'_n)_n$ unabhängige Markovketten mit Übergangsmatrix aus a), so gilt für $z_0, z'_0 \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{L}\big((Z_n + Z'_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \,\big|\, Z_0 = z_0, Z'_0 = z'_0\big) = \mathcal{L}\big((Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \,\big|\, Z_0 = z_0 + z'_0\big).$$

c) Sei $\psi^{(n)} : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch $\psi^{(0)}(s) = s$, $\psi^{(n)} = \psi \circ \psi^{(n-1)}$ ($\psi^{(n)}$ ist die n-fache Iteration von ψ). Die Erzeugendenfunktion von Z_n, gegeben $Z_0 = z_0 \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch

$$\mathbb{E}\big[s^{Z_n} \,\big|\, Z_0 = z_0\big] = \big(\psi^{(n)}(s)\big)^{z_0} = \Big(\frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}\Big)^{z_0}$$

und es gilt $\mathbb{E}\big[Z_n \,\big|\, Z_0 = z_0\big] = z_0$.
[*Hinweis.* Mit Teil b) lässt sich die Frage auf den Fall $z_0 = 1$ reduzieren, die Formel für $\psi^{(n)}$ kann man beispielsweise induktiv zeigen.]

d) Für $x, t > 0$ sei $\nu_{x,t} \in \mathcal{M}_f([0,\infty))$ definiert durch $\nu_{x,t}(du) = \frac{x}{t^2} e^{-u/t} 1_{\{u \geqslant 0\}} du$ (d.h. $\nu_{x,t}$ ist $(x/t)\,\mathrm{Exp}(1/t)$) und $\kappa_t(x,\cdot) := \mathrm{CPoi}(\nu_{x,t}) = e^{-\nu_{x,t}(\mathbb{R}_+)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \nu_{x,t}^{*k}$, sowie $\kappa_t(0,\cdot) := \delta_0$.
Die Laplace-Transformierte von $\kappa_t(x,\cdot)$ ist gegeben durch

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\, \kappa_t(x,dy) = \exp\Big(-x\frac{\lambda}{1+\lambda t}\Big), \quad \lambda \geqslant 0$$

und die Familie von stochastischen Kernen $(\kappa_t)_{t\geqslant 0}$ bildet eine Markov-Halbgruppe, d.h.

$$\kappa_{s+t}(x,dy) = \int_{\mathbb{R}_+} \kappa_s(x,dz)\, \kappa_t(z,dy), \quad s,t \geqslant 0.$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie die Laplace-Transformierten.]

e) Für $x \geqslant 0, t \geqslant 0$ gilt

$$\mathcal{L}\big(\tfrac{1}{N} Z_{\lfloor Nt \rfloor} \,\big|\, Z_0 = \lfloor Nx \rfloor\big) \xrightarrow[N\to\infty]{w} \mathrm{CPoi}(\nu_{x,t})$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie Laplace-Transformierte.]

b.w.

f) Sei $z > 0$. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $(Z_n^{(N)})_{n=0,1,2,\dots}$ rekursiv definiert durch $Z_0^{(N)} = \lfloor Nz \rfloor$, $Z_{n+1}^{(N)} = \sum_{i=1}^{Z_n^{(N)}} \xi_{n,i}$ (d.h. $Z^{(N)}$ ist verteilt wie die Markovkette aus a) mit Start im Punkt $\lfloor Nz \rfloor$). Der Prozess

$$Y_t^{(N)} := \tfrac{1}{N} Z_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)},\ t \geqslant 0 \quad \text{konvergiert im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen}$$

gegen einen Markovprozess $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ mit Übergangshalbgruppe $(\kappa_t)_{t \geqslant 0}$ aus d) und $Y_0 = z$.
[*Hinweis.* Iterieren Sie e).]

g)* Es gibt eine Version $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_t)_{t \geqslant 0}$ des Markovprozesses $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ aus f), die stetige Pfade besitzt.
Wenn man in f) anstatt $Y^{(N)}$ den stetig interpolierten Prozess

$$\widetilde{Y}_t^{(N)} := \tfrac{1}{N} Z_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)} + \big(t - N^{-1} \lfloor Nt \rfloor\big) \Big(Z_{\lfloor Nt \rfloor + 1}^{(N)} - Z_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}\Big), \quad t \geqslant 0$$

betrachtet, so gilt $\widetilde{Y}^{(N)} \Rightarrow_{N \to \infty} \widetilde{Y}$ auf dem Raum der stetigen Pfade.
[*Hinweis.* Man kann beispielsweise 4-te Momente von Inkrementen abschätzen und dann den Satz von Kolmogorov-Chentsov verwenden (analog zum Nachweis, dass die Brownsche Bewegung stetige Pfade besitzt).]