Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 6

Aufgabe 6.1 Wir betrachten den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = (0,1]$, $\mathscr{A} = \mathcal{B}((0,1])$, $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(0,1]$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$,

$$\mathcal{F}_t := \big\{A \in \mathscr{A} : A \subset (0,t] \text{ oder } (t,1] \subset A\big\}, \quad 0 < t < 1$$

und $\mathcal{F}_t = \mathscr{A}$ für $t \geqslant 1$ (überzeugen Sie sich, dass $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ tatsächlich eine Filtration bildet).

a) Für $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $t \geqslant 0$ gilt f.s.

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t] = A_t := \begin{cases} Y(\omega), & 0 < \omega \leqslant t, \\ \frac{1}{1-t}\int_{(t,1)} Y(u)\,du, & t < \omega < 1. \end{cases}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie Ereignisse der Form $\{A_t > a\}$ um zu sehen, dass A_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.]

b) Sei die ZV $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $Y(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$ und sei $M_t := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geqslant 0$. $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal und es gilt

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{\omega}} 1_{(0,t]}(\omega) + \frac{2}{1+\sqrt{t}} 1_{(t,1]}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

c) Sei T $(= T(\omega))$ eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann

$$\text{gibt es ein } \varepsilon \in (0,1) \text{ mit } T(\omega) \geqslant \omega 1_{(0,\varepsilon)}(\omega).$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst, dass für $\omega_0 \in (0,1)$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T \leqslant \omega_0 - 1/n\} \supset (\omega_0, 1]$, falls $T(\omega_0) < \omega_0$. Führen Sie dann die Annahme, dass $T(\omega_k) < \omega_k$ für eine Folge $\omega_k \downarrow 0$ gilt, zum Widerspruch.]

d) Sei T eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann gilt $\mathbb{E}[M_T^2] = \infty$ (d.h. M ist kein lokales $\mathcal{L}^2$-Martingal).

[*Hinweis.* Verwenden Sie Teile a) und b) um zu zeigen, dass $\mathbb{E}[M_T^2] \geqslant \int_0^\varepsilon \frac{d\omega}{\omega}$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt.]

Aufgabe 6.2 a) Für $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ ist auch $X_t := M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t$ ein stetiges lokales Martingal. Wenn zusätzlich gilt $\mathbb{E}[M_0^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$ für jedes $t \geqslant 0$, so ist $M \in \mathcal{M}^c_2$.

b) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und eine f.s. endliche Stoppzeit τ (auf einem geeigneten filtrierten W'raum) finden, so dass $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\tau] = \infty$ gilt aber auch aber $\mathbb{E}[M_\tau^2] < \infty$?

c) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und zwei f.s. endliche Stoppzeiten $\sigma \leqslant \tau$ finden mit $\mathbb{E}[|M_\tau|] < \infty$ aber $\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \neq M_\sigma$?

[*Hinweis.* Für b) und c) kann man die Brownsche Bewegung und geeignete Stoppzeiten verwenden.]

Aufgabe 6.3 In Kapitel 2.4 der Vorlesung haben wir in Prop. 2.38 und Prop. 2.39 Aussagen, die wir vorher für stochastische Integrale mit Integratoren M aus $\mathcal{M}^c_2$ bewiesen hatten, auf den allgemeineren Fall eines Integrators M aus $\mathcal{M}^c_{loc}$ übertragen. Beweisen Sie einige oder alle dieser Aussagen.