Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 7

Aufgabe 7.1 Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung. In Aufgabe 1.2 hatten wir insbesondere gesehen, dass $B_t^2 - t$ ein Martingal ist. Hier geht es um entsprechende Ausdrücke mit höheren Potenzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

das n-te Hermite-Polynom ($h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - x - 3$, ...) und

$$M_t^{(n)} := t^{n/2} h_n(B_t/\sqrt{t}).$$

Zeigen Sie: Es ist $M_t^{(n)} = n \int_0^t M_s^{(n-1)}\, dB_s$, also

$$M_t^{(n)} = n! \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \ldots dB_{s_2}\, dB_{s_1}$$

und $(M_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Sei $H_n(x,y) := y^{n/2} h_n(x/y)$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ (stetig fortgesetzt mit $H_n(x,0) = x^n$), dann gilt $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n + \frac{\partial}{\partial y} H_n = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} H_n = n H_{n-1}$. Verwenden Sie die zeitabhängige Itō-Formel. Für die Martingaleigenschaft zeigen Sie (z.B. mit dem Spiegelungsprinzip), dass $\mathbb{E}\big[\sup_{s\leqslant t} |B_s|^p\big] < \infty$ für alle $t \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ gilt.]

Aufgabe 7.2 Sei (M_t) ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, wir setzen $M_t^* := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s$.

a) Zeigen Sie: Für $x, y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x, \langle M\rangle_t \leqslant y\big) \leqslant \exp\big(-x^2/2y\big).$$

[*Hinweis.* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $X_t := \exp\big(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \langle M\rangle_t\big)$ ein nicht-negatives lokales Martingal und daher insbesondere ein nicht-negatives Supermartingal.]

b) Es gelte weiterhin $\langle M\rangle_t \leqslant ct$ für $t \geqslant 0$ mit einem $c \in (0,\infty)$. Dann gilt die folgende Version der Bernstein-Ungleichung

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x\big) \leqslant \exp\Big(-\frac{x^2}{2ct}\Big)$$

und $Z_t := \exp\big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.