Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 8

Aufgabe 8.1 Geben Sie ein Beispiel für ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t\geqslant 0}$ an (d.h. es gilt $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$), das kein Martingal ist.

[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. eine dreidimensionale Brownsche Bewegung (B_t) mit Startpunkt $B_0 \neq 0$ und untersuchen Sie $M_t = 1/||B_t||$ (wobei $||(x_1, x_2, x_3)|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm bezeichnet). Sie können die Verteilung von $||B_t||$ und damit auch von M_t leicht explizit bestimmen, wenn Sie annehmen, dass B_0 dreidimensional standard-normalverteilt ist, oder Sie können bei festem Startpunkt $B_0 = x \neq 0$ die auftretenden Integrale „grob von Hand" abschätzen.]

Aufgabe 8.2 (Ein pfadweiser Zugang zum Itō-Integral) Sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots$ und $\lim_{m\to\infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$ (d.h. $\Delta^{(n+1)}$ ist eine Verfeinerung von $\Delta^{(n)}$) und mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}}(t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

Für eine (deterministische) stetige Funktion φ, $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}$, und $t \geqslant 0$ sei

$$[\varphi]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big)^2 \in [0,\infty]$$

die quadratische Variation (längs der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$ sofern der Grenzwert existiert (ansonsten bleibt $[\varphi]_t$ undefiniert). Sei weiter

$$\mathcal{C}_{\Delta,2} := \big\{\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \text{ stetig und } [\varphi]_t \text{ existiert und } [\varphi]_t < \infty \text{ für alle } t \geqslant 0\big\}$$

die Menge der stetigen Funktionen, die (bezüglich der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$) endliche quadratische Variation besitzen.

Dann existiert für jedes $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $t \geqslant 0$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} f'\big(\varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big)\big(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big) =: \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s$$

und es gilt die Itō-Formel

$$f(\varphi_t) = f(\varphi_0) + \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s,$$

wobei $\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s$ als Integral bezüglich dem signierten Maß auf $\mathbb{R}_+$ mit Verteilungsfunktion $[\varphi]_\cdot$ aufgefasst wird.

Bemerkung: In Aufgabe 1.3 hatten wir insbesondere gesehen, dass mit $\Delta^{(n)} = \{m/2^n : m \in \mathbb{Z}_+\}$ für die eindimensionale Brownsche Bewegung B gilt $\mathbb{P}(B \in \mathcal{C}_{\Delta,2}) = 1$, d.h. dieser Zugang gestattet (zumindest) in diesem Fall eine „pfadweise" Interpretation des stochastischen Integrals.

[*Hinweis.* Betrachten Sie eine Taylor-Entwicklung von f bis zur 2. Ordnung. Wenn Sie bei Ihren Überlegungen „steckenbleiben" sollten, finden Sie Rat und Hilfe z.B. in Kapitel 25.3 von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, oder in H. Föllmer, Calcul d'Itô sans probabilités, Lecture Notes in Math. 850, S. 143–150, Springer, 1981.]