Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 9

Aufgabe 9.1 a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch (d.h. $\Delta f(x) \equiv 0$) und beschränkt. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung zusammen mit dem Martingalkonvergenzsatz um zu zeigen, dass f konstant ist.

b) Sei $f(z)$ ein nicht-konstantes Polynom in z. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung um zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \varepsilon\} \neq \varnothing$. Folgern Sie, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ gibt.

Aufgabe 9.2 Sei $d \geqslant 2$, $B = (B^{(1)}, \ldots, B^{(d)})$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 \neq 0$, $\rho_t := ||B_t|| := \big((B_t^{(1)})^2 + \cdots + (B_t^{(d)})^2\big)^{1/2}$, $t \geqslant 0$.

Zeigen Sie:

$$W_t = \rho_t - \rho_0 - \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\, ds, \quad t \geqslant 0$$

ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung.

Aufgabe 9.3 a) Sei $(B_t)_{t \geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung,

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t^{(2)} = 0\}$$

der Zeitpunkt des Auftreffens auf der x-Achse. Zeigen Sie: Bei Start in $(B_0^{(1)}, B_0^{(2)}) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ besitzt die Verteilung von $B_\tau^{(1)}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|y_0|}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie, dass gemäß Aufg. 1.2 d) gilt

$$\mathbb{E}\big[\exp(-\lambda\tau)\big] = \exp\big(-y_0\sqrt{2\lambda}\big)$$

und dass $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ unabhängig sind, um $\mathbb{E}\big[\exp(i\lambda B_\tau^{(1)})\big]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.]

b) Sei $\alpha \in (0, \pi)$, $K_\alpha := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x > y/\tan(\alpha)\big\}$ ein Kegel mit Öffnungswinkel α, $(B_t)_{t \geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung, $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \partial K_\alpha\}$ der Zeitpunkt des Auftreffens im Kegelrand. Für $(x, y) \in K_\alpha$, $p > 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{(x,y)}\Big[||(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})||^p\Big] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad p\alpha < \pi$$

(Wenn Sie möchten, können Sie auch die Verteilung von $(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})$ explizit bestimmen.)

[*Hinweis.* Fassen Sie K_α als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, die Abbildung $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ bildet K_α konform auf die obere Halbebene ab.]