Ausgewählte Kapitel der Stochastik **SS 2015**

Blatt 10

Aufgabe 10.1 Bestimmen Sie im Black-Scholes-Merton-Modell (mit instantanem Renditeparameter μ, Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate r) die fairen Preise der europäischen Optionen mit Laufzeit T und Auszahlungsprofilen (für einen gewissen „Ausübungspreis" $K > 0$)

$$h_1(S_T) = (K - S_T)^+, \;\; h_2(S_T) = S_T \wedge K, \;\; h_3(S_T) = |S_T - K|, \;\; h_4(S_T) = \big(K - |S_T - K|\big)^+$$

(im Jargon sind dies Put, Covered Call, Straddle und Butterfly).

[*Hinweis.* Stellen Sie die Auszahlungsprofile als geeignete Linearkombinationen von S_T und Call-Optionen dar. Man kann alle Preisformeln im Prinzip explizit machen (als algebraische Ausdrücke, die die Verteilungsfunktion der Normalverteilung beinhalten), für eine übersichtliche Darstellung mag es angenehmer zu sein, den Preis einer Call-Option als „Elementarfunktion" zu betrachten.]

Aufgabe 10.2 (Eine Version des Martingaldarstellungssatzes) Sei $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ eine standard-Brownsche Bewegung, $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ die (rechtstetige Vervollständigung der) von B erzeugte(n) Filtration, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$.

a) Zeigen Sie: Die Menge der ZVn der Form

$$\Big\{ \exp\big(\textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\big) : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \Big\}$$

liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}_\infty)$.

b) Folgern Sie: Für $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}, \mathcal{F}_\infty)$ gibt es einen (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutigen previsiblen Prozess $(H_t)_{t \geqslant 0}$ mit

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_s^2 \, ds \Big] < \infty \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{E}[Y] + \int_0^\infty H_s \, dB_s.$$

[*Hinweis.* Diese Aufgabe ist (natürlich auch) eine Einladung, an entsprechender Stelle in die Literatur zu schauen, beispielsweise in Kap. V, § 3 des Buches von D. Revuz und M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3. Aufl., Springer 1999.

Wenn Sie möchten, folgern Sie weiter, dass jedes lokale $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$-Martingal $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ eine Darstellung der Form $M_t = C + \int_0^t H_s \, dB_s$ mit einer Konstante C und einem previsiblen Prozess $(H_t)_{t \geqslant 0}$ besitzt. Insbesondere besitzt jedes solche M stetige Pfade.]

Aufgabe 10.3 In der Vorlesung wurden Bedingungen an ein stetiges lokales Martingal X angegeben, unter denen durch $Z_t := \exp\big(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t\big)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal definiert ist, nämlich

1. $(e^{X_t/2})_{t \geqslant 0}$ ist ein gleichgradig integrierbares Submartingal (Kazamaki-Bedingung) oder
2. $\mathbb{E}\big[e^{\langle X \rangle_\infty / 2}\big] < \infty$ (Novikov-Bedingung).

Beweisen Sie diese Aussagen.

[*Hinweis.* Diese Aufgabe ist (natürlich auch) eine Einladung, an entsprechender Stelle in die Literatur zu schauen, beispielsweise in Kap. VIII, § 1 des Buches von D. Revuz und M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3. Aufl., Springer 1999.]