Übungen zur Stochastik III **SS 2016**

Blatt 2

Aufgabe 2.1 Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie: $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal und für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}\big(B_\tau = b\big) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $\big(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\big)_{t\geqslant 0}$ ein Martingal, und für $\tau_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

(Zusatz: Folgern Sie, dass τ_a die Dichte

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} t^{-3/2}, \quad t > 0.$$

besitzt. Bericht: Dies ist eine (einseitige, strikt) stabile Verteilung zum Index 1/2 mit Lévy-Maß $\nu(dy) = \big(|a|/\sqrt{2\pi}\big) y^{-3/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\, dy$.)

c) Seien $a, b > 0$, $\tilde{\tau}_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t - at = b\}$ ($\tilde{\tau}_{a,b}$ ist Stoppzeit mit Werten in $[0,\infty]$). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\tilde{\tau}_{a,b}}] = \exp\big(-ab - b\sqrt{a^2 + 2\lambda}\big), \quad \lambda \geqslant 0$$

und folgern Sie

$$\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}, \qquad \text{sowie} \quad \sup\{B_t - at : t \geqslant 0\} \stackrel{d}{=} \mathrm{Exp}(2a).$$

Aufgabe 2.2 Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,\mathbb{P}\big(B_s \leqslant 1 \text{ für alle } 0 \leqslant s \leqslant t\big) = \sqrt{2/\pi}.$$