Übungen zur Stochastik III **SS 2016**

Blatt 3

Aufgabe 3.1 Sei $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. $N_0 = 0$, N hat unabhängige Inkremente ($N_{t+h} - N_t$ ist u.a. von $\mathcal{F}_t := \sigma(N_s : s \leqslant t)$ für $t, h \geqslant 0$), $N_{t+h} - N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda h)$ für $t \geqslant 0, h > 0$.

Dann ist $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal, und ebenso $\widetilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t$, $t \geqslant 0$.

Aufgabe 3.2 Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t \geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du, \quad s, t \geqslant 0.$$

$M_t := \exp\left(Z_t - \frac{1}{2} c(t,t)\right)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]

Aufgabe 3.3 (Ein pfadweiser Zugang zum Itō-Integral) Sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots$ und $\lim_{m \to \infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$ (d.h. $\Delta^{(n+1)}$ ist eine Verfeinerung von $\Delta^{(n)}$) und mit $\lim_{n \to \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} (t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

Für eine (deterministische) stetige Funktion φ, $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}$, und $t \geqslant 0$ sei

$$[\varphi]_t := \lim_{n \to \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\varphi_{t \wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}}\right)^2 \in [0, \infty]$$

die quadratische Variation (längs der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) sofern der Grenzwert existiert (ansonsten bleibt $[\varphi]_t$ undefiniert). Sei weiter

$$\mathcal{C}_{\Delta,2} := \left\{\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \text{ stetig und } [\varphi]_t \text{ existiert und } [\varphi]_t < \infty \text{ für alle } t \geqslant 0\right\}$$

die Menge der stetigen Funktionen, die (bezüglich der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$) endliche quadratische Variation besitzen.

Dann existiert für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t \geqslant 0$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} f'\left(\varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}}\right)\left(\varphi_{t \wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}}\right) =: \int_0^t f'(\varphi_s) d\varphi_s$$

und es gilt die Itō-Formel

$$f(\varphi_t) = f(\varphi_0) + \int_0^t f'(\varphi_s) d\varphi_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(\varphi_s) d[\varphi]_s,$$

wobei $\int_0^t f''(\varphi_s) d[\varphi]_s$ als Integral bezüglich dem signierten Maß auf $\mathbb{R}_+$ mit Verteilungsfunktion $[\varphi]_\cdot$ aufgefasst wird.

Bemerkung: In Aufgabe 1.3 hatten wir insbesondere gesehen, dass mit $\Delta^{(n)} = \{m/2^n : m \in \mathbb{Z}_+\}$ für die eindimensionale Brownsche Bewegung B gilt $\mathbb{P}(B \in \mathcal{C}_{\Delta,2}) = 1$, d.h. dieser Zugang gestattet (zumindest) in diesem Fall eine „pfadweise“ Interpretation des stochastischen Integrals.

[*Hinweis.* Betrachten Sie eine Taylor-Entwicklung von f bis zur 2. Ordnung. Wenn Sie bei Ihren Überlegungen „steckenbleiben“ sollten, finden Sie Rat und Hilfe z.B. in Kapitel 25.3 von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, oder in H. Föllmer, Calcul d'Itô sans probabilités, Lecture Notes in Math. 850, S. 143–150, Springer, 1981.]

Aufgabe 3.4 (Zur Schwierigkeit eines „naiven“ stochastischen Integrals, etwa bezüglich der Brownschen Bewegung). Sei $g \in C([0,1])$, für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n-1} f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big).$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) \in \mathbb{R} \text{ existiert für jedes } f \in C([0,1]) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big|g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big| < \infty.$$

[*Hinweis.* Fassen Sie die Frage funktionalanalytisch auf: $X := C([0,1])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$, ist ein Banachraum, ebenso $Y := \mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Betrag, $S_n : X \to Y$ ist ein stetiger linearer Operator.

Der Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Cor. (14.24)) besagt: Wenn für jedes $f \in X$ gilt $\sup_n |S_n(f)| < \infty$, so gilt auch $\sup_n ||S_n|| < \infty$, wobei $||S_n|| := \sup_{f\in X,\, f\neq 0} |S_n(f)|/||f||_\infty$ die Abbildungsnorm von S_n bezeichnet.

Konstruieren Sie für jedes n ein $f_n \in C([0,1])$ mit $f_n(k/2^n) = \operatorname{sgn}\big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big)$ und $||f_n||_\infty \leqslant 1$, was ist dann $S_n(f_n)$?]