Blatt 5

Aufgabe 5.1 a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch (d.h. $\Delta f(x) \equiv 0$) und beschränkt. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung zusammen mit dem Martingalkonvergenzsatz um zu zeigen, dass f konstant ist.

b) Sei $f(z)$ ein nicht-konstantes Polynom in z. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung um zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \varepsilon\} \neq \emptyset$. Folgern Sie, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ gibt.

Aufgabe 5.2 a) Sei $(B_t)_{t\geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung,

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t^{(2)} = 0\}$$

der Zeitpunkt des Auftreffens auf der x-Achse. Zeigen Sie: Bei Start in $(B_0^{(1)}, B_0^{(2)}) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ besitzt die Verteilung von $B_\tau^{(1)}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|y_0|}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie, dass gemäß Aufg. 2.1 b) gilt

$$\mathbb{E}\big[\exp(-\lambda\tau)\big] = \exp\big(-y_0\sqrt{2\lambda}\big)$$

und dass $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ unabhängig sind, um $\mathbb{E}\big[\exp(i\lambda B_\tau^{(1)})\big]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.]

b) Sei $\alpha \in (0, \pi)$, $K_\alpha := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x > y/\tan(\alpha)\big\}$ ein Kegel mit Öffnungswinkel α, $(B_t)_{t\geqslant 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung, $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \partial K_\alpha\}$ der Zeitpunkt des Auftreffens im Kegelrand. Für $(x, y) \in K_\alpha$, $p > 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{(x,y)}\Big[||(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})||^p\Big] < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad p\alpha < \pi$$

(Wenn Sie möchten, können Sie auch die Verteilung von $(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})$ explizit bestimmen.)

[*Hinweis.* Fassen Sie K_α als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, die Abbildung $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ bildet K_α konform auf die obere Halbebene ab.]

Aufgabe 5.3 Bestimmen Sie im Black-Scholes-Merton-Modell (mit instantanem Renditeparameter μ, Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate r) die fairen Preise der europäischen Optionen mit Laufzeit T und Auszahlungsprofilen (für einen gewissen „Ausübungspreis" $K > 0$)

$$h_1(S_T) = (K - S_T)^+, \;\; h_2(S_T) = S_T \wedge K, \;\; h_3(S_T) = |S_T - K|, \;\; h_4(S_T) = \big(K - |S_T - K|\big)^+$$

(im Jargon sind dies Put, Covered Call, Straddle und Butterfly).

[*Hinweis.* Stellen Sie die Auszahlungsprofile als geeignete Linearkombinationen von S_T und Call-Optionen dar. Man kann alle Preisformeln im Prinzip explizit machen (als algebraische Ausdrücke, die die Verteilungsfunktion der Normalverteilung beinhalten), für eine übersichtliche Darstellung mag es angenehmer zu sein, den Preis einer Call-Option als „Elementarfunktion" zu betrachten.]

Aufgabe 5.4 Sei (M_t) ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, wir setzen $M_t^* := \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s$.
a) Zeigen Sie: Für $x, y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x, \langle M \rangle_t \leqslant y\big) \leqslant \exp\big(-x^2/2y\big).$$

[*Hinweis.* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $X_t := \exp\big(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \langle M \rangle_t\big)$ ein nicht-negatives lokales Martingal und daher insbesondere ein nicht-negatives Supermartingal.]
b) Es gelte weiterhin $\langle M \rangle_t \leqslant ct$ für $t \geqslant 0$ mit einem $c \in (0, \infty)$. Dann gilt die folgende Version der Bernstein-Ungleichung

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x\big) \leqslant \exp\Big(-\frac{x^2}{2ct}\Big)$$

und $Z_t := \exp\big(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.