Übungen zur Stochastik III **SS 2018**

Blatt 1

Aufgabe 1.1 Für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ und differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$$

(sofern $Zf(Z)$ und $f'(Z)$ integrierbar sind), insbesondere gilt

$$\mathbb{E}[Z^{2n}] = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2 Sei $(W_t)_{t \geqslant 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung. $B_t := W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$. Beweisen Sie einige (oder wenn Sie möchten auch alle) der folgenden Aussagen:

1. $(B_t)_{t \in [0,1]}$ ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion
$$\operatorname{Cov}[B_s, B_t] = (s \wedge t)(1 - (s \vee t)), \quad s, t \in [0,1].$$
($(B_t)_{t \in [0,1]}$ ist eine *Brownsche Brücke*.)
2. $(B_t)_{t \in [0,1]}$ und W_1 sind unabhängig.
3. $\mathcal{L}\big((W_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \,\big|\, |W_1| < \varepsilon\big) \Longrightarrow \mathcal{L}\big((B_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}\big)$ für $\varepsilon \to 0$.
4. $\big((1+t)B_{t/(1+t)}\big)_{t \geqslant 0} \stackrel{d}{=} \big((1+t)B_{1/(1+t)}\big)_{t \geqslant 0} \stackrel{d}{=} (W_t)_{t \geqslant 0}$.
5. Sei $\widetilde{B}_t := (1-t)W_{t/(1-t)}$, $t \in [0,1]$. Es gilt $(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} (\widetilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$
6. Zeitumkehr: $\widetilde{W}_t := W_{1-t} - W_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist ebenfalls BB, weiterhin ist $(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} (B_{1-t})_{t \in [0,1]}$.
7. Sei $X_t := e^{-t} W_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}$. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\operatorname{Cov}[X_s, Y_t] = \exp(-|t-s|)$. X ist stationär, d.h. $X =^d (X_t)_{t+h \in \mathbb{R}}$ für jedes $h \in \mathbb{R}$.
(X ist ein (stationärer) *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.*)

Aufgabe 1.3 Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ Brownsche Bewegung, $t > 0$, für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ sei $s(n,m) := tm/2^n$ und $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$.

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\Big)^2\Big] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung, um aus der linken Abschätzung zu folgern, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\big|\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\big| > \varepsilon\Big) < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$, dann ein Borel-Cantelli-Lemma.]

b) Folgern Sie: Für $\gamma > 1/2$ ist

$$\sup_{0 \leqslant u < v \leqslant t} \frac{|B_v - B_u|}{(v-u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. die Pfade sind auf $[0,t]$ f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung γ.

[*Hinweis.* Auf dem Ereignis $\big\{ \sup_{0 \leqslant u < v \leqslant t} |B_v - B_u|/(v-u)^\gamma < c \big\}$ gilt $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 \leqslant 2^n \times (ct^\gamma 2^{-n\gamma})^2 = c^2 t^{2\gamma} 2^{n(1-2\gamma)}$, was a) widerspricht.]