Übungen zur Stochastik III SS 2018

Blatt 2

Aufgabe 2.1 Sei $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. $N_0 = 0$, N hat unabhängige Inkremente ($N_{t+h} - N_t$ ist u.a. von $\mathcal{F}_t := \sigma(N_s : s \leqslant t)$ für $t, h \geqslant 0$), $N_{t+h} - N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda h)$ für $t \geqslant 0, h > 0$.

Dann ist $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal, und ebenso $\widetilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t$, $t \geqslant 0$.

Aufgabe 2.2 Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung.
a) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $\big(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\big)_{t \geqslant 0}$ ein Martingal, und für $\tau_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

(Zusatz: Folgern Sie, dass τ_a die Dichte

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} t^{-3/2}, \quad t > 0.$$

besitzt. Bericht: Dies ist eine (einseitige, strikt) stabile Verteilung zum Index 1/2 mit Lévy-Maß $\nu(dy) = \big(|a|/\sqrt{2\pi}\big) y^{-3/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\, dy$.)

b) Seien $a, b > 0$, $\widetilde{\tau}_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t - at = b\}$ ($\widetilde{\tau}_{a,b}$ ist Stoppzeit mit Werten in $[0, \infty]$). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \widetilde{\tau}_{a,b}}] = \exp\big(-ab - b\sqrt{a^2 + 2\lambda}\big), \quad \lambda \geqslant 0$$

und folgern Sie

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}, \qquad \text{sowie} \quad \sup\{B_t - at : t \geqslant 0\} \stackrel{d}{=} \mathrm{Exp}(2a).$$

Aufgabe 2.3 Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t \geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gauß'scher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du, \quad s, t \geqslant 0$$

und $M_t := \exp\big(Z_t - \frac{1}{2}c(t,t)\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]

Aufgabe 2.4 a) (Zur Schwierigkeit eines „naiven“ stochastischen Integrals, etwa bezüglich der Brownschen Bewegung). Sei $g \in C([0,1])$, für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n - 1} f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f) \in \mathbb{R} \text{ existiert für jedes } f \in C([0,1]) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \big|g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big| < \infty.$$

b.w.

[*Hinweis.* Fassen Sie die Frage funktionalanalytisch auf: $X := C([0,1])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$, ist ein Banachraum, ebenso $Y := \mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Betrag, $S_n : X \to Y$ ist ein stetiger linearer Operator.

Der Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Cor. (14.24)) besagt: Wenn für jedes $f \in X$ gilt $\sup_n |S_n(f)| < \infty$, so gilt auch $\sup_n ||S_n|| < \infty$, wobei $||S_n|| := \sup_{f\in X,\, f\neq 0} |S_n(f)|/||f||_\infty$ die Abbildungsnorm von S_n bezeichnet.

Konstruieren Sie für jedes n ein $f_n \in C([0,1])$ mit $f_n(k/2^n) = \operatorname{sgn}\big(g\big(\frac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\frac{k}{2^n}\big)\big)$ und $||f_n||_\infty \leqslant 1$, was ist dann $S_n(f_n)$?]

b) (Eine „Baby-Version" des Young-Integrals) Für $\alpha \in (0,1]$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei $||f||_{C^\alpha} := \sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1} |f(t) - f(s)|/(t-s)^\alpha$ die α-Hölder-Norm und $C^\alpha := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, ||f||_{C^\alpha} < \infty\}$ der Raum der α-Hölder-stetigen Funktionen (auf $[0,1]$).

Seien $\alpha, \beta \in (0,1]$ mit $\alpha + \beta > 1$, $f \in C^\alpha, g \in C^\beta$. Zeigen Sie: Für $S_n(f)$ aus (1) gilt

$$|S_{n+1}(f) - S_n(f)| \leqslant 2^{-\alpha-\beta} ||f||_{C^\alpha} ||g||_{C^\beta}\, 2^{-(\alpha+\beta-1)n} \tag{2}$$

und folgern Sie, dass

$$S(f) := \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

existiert und

$$\sup\left\{\frac{|S(f)|}{||f||_{C^\alpha}} : 0 < ||f||_{C^\alpha} < \infty\right\} < \infty$$

erfüllt.

[*Hinweis.* Für (2) beachten Sie, dass

$$\begin{aligned}&\Big\{f\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big(g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big) + f\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big(g\big(\tfrac{2k+2}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big)\Big\} - f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big)\\ &= \Big(f\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big) - f\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big)\Big(g\big(\tfrac{2k+2}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big)\end{aligned}$$

gilt.]