Übungen zur Stochastik III **SS 2018**

Blatt 3

Aufgabe 3.1 Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, dann sind $(B_t)_{t\geqslant 0}$ und $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ Martingale. Hier geht es um entsprechende Ausdrücke mit höheren Potenzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

das n-te Hermite-Polynom ($h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - x - 3$, ...) und

$$M_t^{(n)} := t^{n/2} h_n(B_t/\sqrt{t}).$$

Zeigen Sie: Es ist $M_t^{(n)} = n \int_0^t M_s^{(n-1)}\, dB_s$, also

$$M_t^{(n)} = n! \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \dots dB_{s_2}\, dB_{s_1}$$

und $(M_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Sei $H_n(x,y) := y^{n/2} h_n(x/y)$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ (stetig fortgesetzt mit $H_n(x,0) = x^n$), dann gilt $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n + \frac{\partial}{\partial y} H_n = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} H_n = n H_{n-1}$. Verwenden Sie die zeitabhängige Itō-Formel. Für die Martingaleigenschaft zeigen Sie (z.B. mit dem Spiegelungsprinzip), dass $\mathbb{E}\big[\sup_{s\leqslant t} |B_s|^p\big] < \infty$ für alle $t \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ gilt.]

Aufgabe 3.2 a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch (d.h. $\Delta f(x) \equiv 0$) und beschränkt. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung zusammen mit dem Martingalkonvergenzsatz um zu zeigen, dass f konstant ist.

b) Sei $f(z)$ ein nicht-konstantes Polynom in z. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung um zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \varepsilon\} \neq \varnothing$. Folgern Sie, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ gibt.

Aufgabe 3.3 Sei (M_t) ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, wir setzen $M_t^* := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} M_s$.

a) Zeigen Sie: Für $x, y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x, \langle M\rangle_t \leqslant y\big) \leqslant \exp\big(-x^2/2y\big).$$

[*Hinweis.* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $X_t := \exp\big(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \langle M\rangle_t\big)$ ein nicht-negatives lokales Martingal und daher insbesondere ein nicht-negatives Supermartingal.]

b) Es gelte weiterhin $\langle M\rangle_t \leqslant ct$ für $t \geqslant 0$ mit einem $c \in (0,\infty)$. Dann gilt die folgende Version der Bernstein-Ungleichung

$$\mathbb{P}\big(M_t^* \geqslant x\big) \leqslant \exp\Big(-\frac{x^2}{2ct}\Big)$$

und $Z_t := \exp\big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

Aufgabe 3.4 Geben Sie ein Beispiel für ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t\geqslant 0}$ an (d.h. es gilt $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$), das kein Martingal ist.

[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. eine dreidimensionale Brownsche Bewegung (B_t) mit Startpunkt $B_0 \neq 0$ und untersuchen Sie $M_t = 1/||B_t||$ (wobei $||(x_1,x_2,x_3)|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm bezeichnet). Sie können die Verteilung von $||B_t||$ und damit auch von M_t leicht explizit bestimmen, wenn Sie annehmen, dass B_0 dreidimensional standard-normalverteilt ist, oder Sie können bei festem Startpunkt $B_0 = x \neq 0$ die auftretenden Integrale „grob von Hand" abschätzen.]

Aufgabe 3.5 (Ein pfadweiser Zugang zum Itō-Integral) Sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots$ und $\lim_{m\to\infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$ (d.h. $\Delta^{(n+1)}$ ist eine Verfeinerung von $\Delta^{(n)}$) und mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}}(t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

Für eine (deterministische) stetige Funktion φ, $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}$, und $t \geqslant 0$ sei

$$[\varphi]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\right)^2 \in [0,\infty]$$

die quadratische Variation (längs der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$) sofern der Grenzwert existiert (ansonsten bleibt $[\varphi]_t$ undefiniert). Sei weiter

$$\mathcal{C}_{\Delta,2} := \left\{\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \text{ stetig und } [\varphi]_t \text{ existiert und } [\varphi]_t < \infty \text{ für alle } t \geqslant 0\right\}$$

die Menge der stetigen Funktionen, die (bezüglich der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$) endliche quadratische Variation besitzen.

Dann existiert für jedes $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $t \geqslant 0$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} f'\left(\varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\right)\left(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\right) =: \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s$$

und es gilt die Itō-Formel

$$f(\varphi_t) = f(\varphi_0) + \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s,$$

wobei $\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s$ als Integral bezüglich dem signierten Maß auf $\mathbb{R}_+$ mit Verteilungsfunktion $[\varphi]_\cdot$ aufgefasst wird.

Bemerkung: In Aufgabe 1.3 hatten wir insbesondere gesehen, dass mit $\Delta^{(n)} = \{m/2^n : m \in \mathbb{Z}_+\}$ für die eindimensionale Brownsche Bewegung B gilt $\mathbb{P}(B \in \mathcal{C}_{\Delta,2}) = 1$, d.h. dieser Zugang gestattet (zumindest) in diesem Fall eine „pfadweise“ Interpretation des stochastischen Integrals.

[*Hinweis.* Betrachten Sie eine Taylor-Entwicklung von f bis zur 2. Ordnung. Wenn Sie bei Ihren Überlegungen „steckenbleiben“ sollten, finden Sie Rat und Hilfe z.B. in Kapitel 25.3 von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, oder in H. Föllmer, Calcul d'Itô sans probabilités, Lecture Notes in Math. 850, S. 143–150, Springer, 1981.]

Aufgabe 3.6 Für stetige Semimartingale X und Y definiert man das *Fisk-Stratonovich-Integral* mittels

$$\int_0^t Y_s\,\partial X_s := \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X, Y\rangle_t, \quad t \geqslant 0,$$

wobei $\int_0^t Y_s\,dX_s$ das Itō-Integral bezeichnet; in der Literatur ist auch die Notation $\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s\,\partial X_s$ üblich).

Zeigen Sie, dass für $f \in C^3(\mathbb{R})$ und ein stetiges Semimartingal X gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\partial X_s, \quad t \geqslant 0.$$