Prof. Dr. Matthias Birkner — JGU Mainz

Übungen zur Stochastik III — **SS 2022**

Blatt 1

Aufgabe 1.1 (für Freunde der partiellen Integration) Für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ und differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$$

(sofern $Zf(Z)$ und $f'(Z)$ integrierbar sind), insbesondere gilt

$$\mathbb{E}[Z^{2n}] = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2 (nicht nur für Seminarteilnehmer) Sei $N \in \mathbb{N}$, wir betrachten eine zeitdiskrete Markovkette $X^{(N)} = (X_g^{(N)})_{g\in\mathbb{N}_0}$ auf $\{0,1,\dots,N\}$, wobei

$$\mathcal{L}\big(X_{g+1}^{(N)} \,\big|\, X_g^{(N)} = x\big) = \mathrm{Bin}(N, x/N)$$

gilt (man nennt dies auch ein *Wright-Fisher-Modell*[1] mit Populationsgröße N).

a) Zeigen Sie, dass $X^{(N)}$ ein Martingal ist (bezüglich der von ihm selbst erzeugten Filtration) und nutzen Sie dies, um

$$\mathbb{P}\big(X_g^{(N)} = N \text{ für ein } g \in \mathbb{N}_0 \,\big|\, X_0^{(N)} = x\big)$$

zu bestimmen.

b) Berechnen Sie

$$\mathbb{E}\Big[\frac{X_g^{(N)}}{N}\frac{N - X_g^{(N)}}{N} \,\Big|\, X_0^{(N)} = x\Big]$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $g = 1$.

Aufgabe 1.3 (eine Pralinenschachtel zur Brownschen Bewegung) Sei $(W_t)_{t\geqslant 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung. $B_t := W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$. Beweisen Sie einige (oder wenn Sie möchten auch alle) der folgenden Aussagen:

1. $(B_t)_{t\in[0,1]}$ ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

   $$\mathrm{Cov}[B_s, B_t] = (s \wedge t)(1 - (s \vee t)), \quad s,t \in [0,1]$$

   ($(B_t)_{t\in[0,1]}$ ist eine *Brownsche Brücke*.)

2. $(B_t)_{t\in[0,1]}$ und W_1 sind unabhängig.

3. $\mathcal{L}\big((W_t)_{0\leqslant t\leqslant 1} \,\big|\, |W_1| < \varepsilon\big) \Longrightarrow \mathcal{L}\big((B_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}\big)$ für $\varepsilon \to 0$.

[1] Nach Sewall G. Wright (1889–1988) und Ronald A. Fisher (1890–1962). Eine denkbare Interpretation als Populationsmodell: Eine Population entwickelt sich in diskreten Generationen, jede Generation besteht aus N Indidviduen, die zwei verschiedene Typen haben können (sagen wir, Typ 0 und Typ 1), $X_g^{(N)}$ bezeichne die Anzahl Typ 1-Individuen in Generation g. Die Nachfolgegeneration $g+1$ wird so gebildet, dass für jedes der N Individuen unabhängig und uniform ein Elternindividuum aus Generation g gewählt wird, das Kind erhält den Typ des Elters.

4. $\big((1+t)B_{t/(1+t)}\big)_{t\geqslant 0} \overset{d}{=} \big((1+t)B_{1/(1+t)}\big)_{t\geqslant 0} \overset{d}{=} (W_t)_{t\geqslant 0}$.

5. Sei $\widetilde{B}_t := (1-t)W_{t/(1-t)}$, $t \in [0,1]$. Es gilt $(B_t)_{t\in[0,1]} \overset{d}{=} (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}$

6. Zeitumkehr: $\widetilde{W}_t := W_{1-t} - W_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist ebenfalls BB, weiterhin ist

$$(B_t)_{t\in[0,1]} \overset{d}{=} (B_{1-t})_{t\in[0,1]}$$

7. Sei $X_t := e^{-t}W_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}$. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\operatorname{Cov}[X_s, X_t] = \exp(-|t-s|)$. X ist stationär, d.h. $X =^d (X_t)_{t+h\in\mathbb{R}}$ für jedes $h \in \mathbb{R}$.

   (X ist ein (stationärer) *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.*)