Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

**Übungen zur Stochastik III** **SS 2022**

Blatt 2

**Aufgabe 2.1 (Quadratische Variation der Brownschen Pfade und eine Folgerung zu Hölder-Eigenschaften)** Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, $t > 0$, für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ sei $s(n,m) := tm/2^n$ und $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$.

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\Big)^2\Big] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung, um aus der linken Abschätzung zu folgern, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\big|\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\big| > \varepsilon\Big) < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$, dann ein Borel-Cantelli-Lemma.]

b) Folgern Sie: Für $\gamma > 1/2$ ist

$$\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} \frac{|B_v - B_u|}{(v-u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. die Pfade sind auf $[0,t]$ f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung $\gamma$.

[*Hinweis.* Auf dem Ereignis $\big\{\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} |B_v - B_u|/(v-u)^\gamma < c\big\}$ gilt $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 \leqslant 2^n \times (ct^\gamma 2^{-n\gamma})^2 = c^2 t^{2\gamma} 2^{n(1-2\gamma)}$, was a) widerspricht.]

**Aufgabe 2.2 („Ernte" aus der Brownschen Bewegung abgeleiteter Martingale)** Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie: $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal und für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}\big(B_\tau = b\big) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $\big(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\big)_{t\geqslant 0}$ ein Martingal, und für $\tau_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

c) Folgern Sie aus b): $\tau_a$ ist (einseitig strikt) stabil zum Index 1/2 mit Lévy-Maß $\nu(dy) = \big(|a|/\sqrt{2\pi}\big) y^{-3/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\, dy$, die Dichte von $\tau_a$ ist

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} t^{-3/2}, \quad t > 0.$$

d) Seien $a, b > 0$, $\widetilde{\tau}_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t - at = b\}$ ($\widetilde{\tau}_{a,b}$ ist Stoppzeit mit Werten in $[0,\infty]$). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\widetilde{\tau}_{a,b}}] = \exp\big(-ab - b\sqrt{a^2 + 2\lambda}\big), \quad \lambda \geqslant 0$$

und folgern Sie

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}, \qquad \text{sowie} \quad \sup\{B_t - at : t \geqslant 0\} \stackrel{d}{=} \mathrm{Exp}(2a).$$