

Aufgabe 3.1 a) (Zur Schwierigkeit eines „naiven“ stochastischen Integrals, etwa bezüglich der Brownschen Bewegung). Sei $g \in C([0, 1])$, für $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right). \quad (1)$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) \in \mathbb{R} \text{ existiert für jedes } f \in C([0, 1]) \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| < \infty.$$

[*Hinweis.* Fassen Sie die Frage funktionalanalytisch auf: $X := C([0, 1])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, ist ein Banachraum, ebenso $Y := \mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Betrag, $S_n : X \rightarrow Y$ ist ein stetiger linearer Operator.

Der Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Cor. (14.24)) besagt: Wenn für jedes $f \in X$ gilt $\sup_n |S_n(f)| < \infty$, so gilt auch $\sup_n \|S_n\| < \infty$, wobei $\|S_n\| := \sup_{f \in X, f \neq 0} |S_n(f)| / \|f\|_\infty$ die Abbildungsnorm von S_n bezeichnet.

Konstruieren Sie für jedes n ein $f_n \in C([0, 1])$ mit $f_n(k/2^n) = \operatorname{sgn}(g(k/2^n) - g((k-1)/2^n))$ und $\|f_n\|_\infty \leq 1$, was ist dann $S_n(f_n)$?

b) (Eine „Baby-Version“ des Young-Integrals) Für $\alpha \in (0, 1]$ und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\|f\|_{C^\alpha} := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} |f(t) - f(s)| / (t - s)^\alpha$ die α -Hölder-Norm und $C^\alpha := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{C^\alpha} < \infty\}$ der Raum der α -Hölder-stetigen Funktionen (auf $[0, 1]$).

Seien $\alpha, \beta \in (0, 1]$ mit $\alpha + \beta > 1$, $f \in C^\alpha$, $g \in C^\beta$. Zeigen Sie: Für $S_n(f)$ aus (1) gilt

$$|S_{n+1}(f) - S_n(f)| \leq 2^{-\alpha-\beta} \|f\|_{C^\alpha} \|g\|_{C^\beta} 2^{-(\alpha+\beta-1)n} \quad (2)$$

und folgern Sie, dass

$$S(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$$

existiert und

$$\sup \left\{ \frac{|S(f)|}{\|f\|_{C^\alpha}} : 0 < \|f\|_{C^\alpha} < \infty \right\} < \infty$$

erfüllt.

[*Hinweis.* Für (2) beachten Sie, dass

$$\begin{aligned} & \left\{ f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) \left(g\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right) + f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \left(g\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right) \right\} - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &= \left(f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) \right) \left(g\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) - g\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \right) \end{aligned}$$

gilt.]

Aufgabe 3.2 (Eine allgemeine Konstruktion interagierender Teilchensysteme mit endlich vielen Teilchen) a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in (0, \infty)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$, $W_1, W_2, \dots$ unabhängig mit $W_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$ und $T_n := W_1 + \dots + W_n$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\exp(-T_n)]$ und zeigen Sie, dass

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{fast sicher}$$

b) Sei S endlich oder abzählbar unendlich,

$$E := \{\alpha = (\alpha(x))_{x \in S} \in \mathbb{N}_0^S : \|\alpha\| := \sum_{x \in S} \alpha(x) < \infty\}$$

E ist abzählbar; wir fassen S als eine Menge von „Orten“ und $\alpha \in E$ als eine „Teilchenkonfiguration“ auf S auf: $\alpha(x)$ gibt an, wieviele Teilchen sich am Ort x befinden. Sei weiter $Q = (q_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in E}$ eine Sprungratenmatrix auf E , die folgenden zusätzlichen Bedingungen genügt:

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $R_n := \sup_{\alpha \in E, \|\alpha\| \leq n} (-q_{\alpha, \alpha}) < \infty$.
2. $q_{\alpha, \beta} = 0$, falls $\|\beta\| > \|\alpha\| + 1$.
3. Es gibt ein $K < \infty$ mit $\sum_{\beta \in E, \|\beta\| = \|\alpha\| + 1} q_{\alpha, \beta} \leq K \|\alpha\|$.

Wir schreiben

$$\hat{p}_{\alpha, \beta} := \frac{q_{\alpha, \beta}}{-q_{\alpha, \alpha}}, \quad \alpha \neq \beta \in E \quad \text{und} \quad \hat{p}_{\alpha, \alpha} := 0, \quad \text{falls} \quad -q_{\alpha, \alpha} > 0$$

(und $\hat{p}_{\alpha, \beta} := \delta_{\alpha, \beta}$, falls $q_{\alpha, \alpha} = 0$) für stochastische Matrix auf E , die zur (zeitdiskreten) Skelettkette gehört.

Sei nun $\alpha_0 \in E$ ein Startzustand und $(\hat{A}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (zeitdiskrete) Markovkette mit Übergangsmatrix $(\hat{p}_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}$ startend in $\hat{A}_0 = \alpha_0$, $V_0, V_1, \dots$ davon unabhängige u.i.v. $\sim \text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Wir setzen $\tau_0 := 0$ und

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n + V_n / (-q_{\hat{A}_n, \hat{A}_n}), & \text{falls } -q_{\hat{A}_n, \hat{A}_n} > 0 \text{ und } \tau_n < \infty \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

Argumentieren Sie: $\tau_n \rightarrow \infty$ fast sicher für $n \rightarrow \infty$ und

$$A_t := \hat{A}_n \quad \text{für } \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \quad t \geq 0$$

definiert eine zeitkontinuierliche Markovkette mit Sprungratenmatrix Q .

[Hinweis. Betrachten Sie z.B. $\widehat{M}_n := \max_{0 \leq k \leq n} \|\hat{A}_k\|$ und

$$M_t = \widehat{M}_n \quad \text{für } \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \quad t \geq 0$$

(und implizit $M_t = \infty$, falls $t \geq \sup_n \tau_n$). Überzeugen Sie sich, dass es eine Kopplung von $(M_t)_{t \geq 0}$ und einer zeitkontinuierlichen Markovkette $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t)_{t \geq 0}$ auf $\mathbb{N}$ mit Sprungratenmatrix

$$\tilde{q}_{m, n} = \begin{cases} Km, & n = m + 1 \\ -Km, & n = m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gibt und verwende Sie Teil a) um einzusehen, dass sich die Sprungzeiten von $\widetilde{M}$ nicht im Endlichen häufen können.]