Prof. Dr. Matthias Birkner | JGU Mainz

Übungen zur Stochastik III | **SS 2022**

Blatt 4

Aufgabe 4.1 Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t \geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gauß'scher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du, \quad s,t \geqslant 0$$

und $M_t := \exp\big(Z_t - \frac{1}{2}c(t,t)\big)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]

Aufgabe 4.2 Sei $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. $N_0 = 0$, N hat unabhängige Inkremente ($N_{t+h} - N_t$ ist u.a. von $\mathcal{F}_t := \sigma(N_s : s \leqslant t)$ für $t, h \geqslant 0$), $N_{t+h} - N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda h)$ für $t \geqslant 0, h > 0$.

Dann ist $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal, und ebenso $\widetilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t$, $t \geqslant 0$.

Aufgabe 4.3 (Zur fraktionalen Brownschen Bewegung) Sei $0 < H < 1$ und

$$C_H(s,t) = \frac{1}{2}\big(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\big), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass $C_H(\cdot,\cdot)$ positiv semidefinit ist, d.h. für $m \in \mathbb{N}$, und beliebige $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^m C_H(s_j, s_k) u_j u_k \geqslant 0$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Erweiterungssatzes von Kolmogorov und des Satzes von Kolmogorov-Chentsov: Es gibt einen zentrierten Gauß'schen Prozess $(X_t^{(H)})_{-\infty < t < \infty}$ mit Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}[X_s, X_t] = C_H(s,t)$ für $s < t \in \mathbb{R}$, dessen Pfade fast sicher Hölder-stetig der Ordnung γ sind für $0 < \gamma < H$.

[*Hinweis.* Für a) dürfen Sie die (in Stochastik II berichtete) Tatsache verwenden, dass für $0 < \alpha \leqslant 2$ und $c > 0$ die Funktion $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \varphi(\theta) = e^{c|\theta|^\alpha} = \mathbb{E}[e^{i\theta S}]$ die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable S ist (S ist symmetrisch stabil verteilt mit Index α, siehe Beispiel 5.12 der Vorlesungsnotizen zur Stochastik II im WS 21/22).

Folgern Sie, dass $\varphi(\cdot)$ positiv semidefinit ist, d.h. es gilt

$$\sum_{j,k=1}^m u_j u_k \varphi(\theta_j - \theta_k) \geqslant 0 \quad \text{für} \;\; u_1, \dots, u_m,\, \theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}$$

(betrachten Sie dazu die komplexwertige Zufallsvariable $Y = \sum_{j=1}^m u_j e^{i\theta_j S}$. Was ist $Y\overline{Y}$?)

Betrachten Sie nun $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$, mit Setzung $u_0 := -\sum_{j=1}^m u_j$ und $s_0 := 0$, so ist

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \big(|s_j|^\alpha + |s_k|^\alpha - |s_j - s_k|^\alpha\big) u_j u_k = -\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m |s_j - s_k|^\alpha u_j u_k$$

(beachte $\sum_{j=0}^m u_j = 0$ nach Definition).

Für (sehr kleines) $c > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m e^{-c|s_j - s_k|^\alpha} u_j u_k &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \big(e^{-c|s_j - s_k|^\alpha} - 1\big) u_j u_k \\ &= -c \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m |s_j - s_k|^\alpha u_j u_k + o(c) \quad c \downarrow 0 \end{aligned}$$

Für b) beachten Sie, dass $X_t^{(H)} - X_s^{(H)}$ zentriert normalverteilt ist mit $\mathrm{Var}[X_t^{(H)} - X_s^{(H)}] = C_H(t,t) + C_H(s,s) - 2C_H(s,t)$.]