

Aufgabe 5.1 (Beweise aus der Vorlesung nachtragen) Beweisen Sie eine von Ihnen gewählte Teilmenge der Aussagen von Proposition 2.38 und Proposition 2.39.

Aufgabe 5.2 (sozusagen eine Umkehrung von Aufgabe 4.1) Sei $(M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges Martingal mit $M_0 = 0$, das zugleich ein Gauß'scher Prozess ist, d.h. $(M_{t_1}, M_{t_2}, \dots, M_{t_n})$ ist multivariat normalverteilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

a) Zeigen Sie: Für $s < t$ ist $M_t - M_s$ unabhängig von $\sigma(M_r, r \leq s)$.

b) Zeigen Sie: Die quadratische Variation von M ist (f.s.) deterministisch, d.h. es gibt eine stetige, nicht-fallende Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\langle M \rangle_t = f(t)$ für $t \geq 0$ f.s.

[Hinweis. Was ist die Kovarianz von $M_t - M_s$ und M_r für $r \leq s < t$?]

Aufgabe 5.3 (ein Martingal, das nicht lokal $\mathcal{L}^2$ ist) Wir betrachten den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0, 1])$, $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(0, 1]$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,

$$\mathcal{F}_t := \{A \in \mathcal{A} : A \subset (0, t] \text{ oder } (t, 1] \subset A\}, \quad 0 < t < 1$$

und $\mathcal{F}_t = \mathcal{A}$ für $t \geq 1$ (überzeugen Sie sich, dass $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tatsächlich eine Filtration bildet).

a) Für $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $t \geq 0$ gilt f.s.

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t] = A_t := \begin{cases} Y(\omega), & 0 < \omega \leq t, \\ \frac{1}{1-t} \int_{(t,1)} Y(u) du, & t < \omega < 1. \end{cases}$$

[Hinweis. Betrachten Sie Ereignisse der Form $\{A_t > a\}$ um zu sehen, dass A_t $\mathcal{F}_t$ -messbar ist.]

b) Sei die ZV $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $Y(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$ und sei $M_t := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$. $(M_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal und es gilt

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{\omega}} 1_{(0,t]}(\omega) + \frac{2}{1 + \sqrt{t}} 1_{(t,1]}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

c) Sei $T (= T(\omega))$ eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann

$$\text{gibt es ein } \varepsilon \in (0, 1) \text{ mit } T(\omega) \geq \omega 1_{(0,\varepsilon)}(\omega).$$

[Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass für $\omega_0 \in (0, 1)$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T \leq \omega_0 - 1/n\} \supset (\omega_0, 1]$, falls $T(\omega_0) < \omega_0$. Führen Sie dann die Annahme, dass $T(\omega_k) < \omega_k$ für eine Folge $\omega_k \downarrow 0$ gilt, zum Widerspruch.]

d) Sei T eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann gilt $\mathbb{E}[M_T^2] = \infty$ (d.h. M ist kein lokales $\mathcal{L}^2$ -Martingal).

[Hinweis. Verwenden Sie Teile a) und b) um zu zeigen, dass $\mathbb{E}[M_T^2] \geq \int_0^\varepsilon \frac{d\omega}{\omega}$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt.]