

Aufgabe 6.1 (Polynome der Brownschen Bewegung, die Martingale bilden) Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, dann sind $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ Martingale. Hier geht es um entsprechende Ausdrücke mit höheren Potenzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

das n -te Hermite-Polynom ($h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - 3x$, ...) und

$$M_t^{(n)} := t^{n/2} h_n(B_t/\sqrt{t}).$$

Zeigen Sie: Es ist $M_t^{(n)} = n \int_0^t M_s^{(n-1)} dB_s$, also

$$M_t^{(n)} = n! \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \dots dB_{s_2} dB_{s_1}$$

und $(M_t^{(n)})_{t \geq 0}$ ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Sei $H_n(x, y) := y^{n/2} h_n(x/\sqrt{y})$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ (stetig fortgesetzt mit $H_n(x, 0) = x^n$), dann gilt $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n + \frac{\partial}{\partial y} H_n = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} H_n = n H_{n-1}$. Verwenden Sie die zeitabhängige Itô-Formel. Für die Martingaleigenschaft zeigen Sie (z.B. mit dem Spiegelungsprinzip), dass $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |B_s|^p] < \infty$ für alle $t \geq 0$, $p \geq 0$ gilt.]

Aufgabe 6.2 Für stetige Semimartingale X und Y definiert man das *Fisk-Stratonovich-Integral* mittels

$$\int_0^t Y_s \partial X_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t, \quad t \geq 0,$$

wobei $\int_0^t Y_s dX_s$ das Itô-Integral bezeichnet; in der Literatur ist auch die Notation $\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s \partial X_s$ üblich).

Zeigen Sie, dass für $f \in C^3(\mathbb{R})$ und ein stetiges Semimartingal X gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \partial X_s, \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 6.3 (Ein pfadweiser Zugang zum Itô-Integral) Sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$ (d.h. $\Delta^{(n+1)}$ ist eine Verfeinerung von $\Delta^{(n)}$) und mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} (t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

Für eine (deterministische) stetige Funktion $\varphi, \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}$, und $t \geq 0$ sei

$$[\varphi]_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\varphi_{t \wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}})^2 \in [0, \infty]$$

die quadratische Variation (längs der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) sofern der Grenzwert existiert (ansonsten bleibt $[\varphi]_t$ undefiniert). Sei weiter

$$\mathcal{C}_{\Delta,2} := \{\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ stetig und } [\varphi]_t \text{ existiert und } [\varphi]_t < \infty \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die Menge der stetigen Funktionen, die (bezüglich der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$) endliche quadratische Variation besitzen.

Dann existiert für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t \geq 0$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} f'(\varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}}) (\varphi_{t \wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}}) =: \int_0^t f'(\varphi_s) d\varphi_s$$

und es gilt die Itô-Formel

$$f(\varphi_t) = f(\varphi_0) + \int_0^t f'(\varphi_s) d\varphi_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(\varphi_s) d[\varphi]_s,$$

wobei $\int_0^t f''(\varphi_s) d[\varphi]_s$ als Integral bezüglich dem signierten Maß auf $\mathbb{R}_+$ mit Verteilungsfunktion $[\varphi]$ aufgefasst wird.

Bemerkung: In Aufgabe 2.1 hatten wir insbesondere gesehen, dass mit $\Delta^{(n)} = \{m/2^n : m \in \mathbb{Z}_+\}$ für die eindimensionale Brownsche Bewegung B gilt $\mathbb{P}(B \in \mathcal{C}_{\Delta,2}) = 1$, d.h. dieser Zugang gestattet (zumindest) in diesem Fall eine „pfadweise“ Interpretation des stochastischen Integrals.

[*Hinweis.* Betrachten Sie eine Taylor-Entwicklung von f bis zur 2. Ordnung. Wenn Sie bei Ihren Überlegungen „steckenbleiben“ sollten, finden Sie Rat und Hilfe z.B. in Kapitel 25.3 von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, oder in H. Föllmer, *Calcul d'Itô sans probabilités*, Lecture Notes in Math. 850, S. 143–150, Springer, 1981.]