

Aufgabe 7.1 (Eine Version der Bernstein-Ungleichung für stetige (lokale) Martingale) Sei (M_t) ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, wir setzen $M_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} M_s$. a) Zeigen Sie: Für $x, y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(M_t^* \geq x, \langle M \rangle_t \leq y) \leq \exp(-x^2/2y).$$

[*Hinweis.* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $X_t := \exp(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \langle M \rangle_t)$ ein nicht-negatives lokales Martingal und daher insbesondere ein nicht-negatives Supermartingal.]

b) Es gelte weiterhin $\langle M \rangle_t \leq ct$ für $t \geq 0$ mit einem $c \in (0, \infty)$. Dann gilt die folgende Version der Bernstein-Ungleichung

$$\mathbb{P}(M_t^* \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2ct}\right)$$

und $Z_t := \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$, $t \geq 0$, ist ein Martingal.

Aufgabe 7.2 (ein strikt lokales Martingal) Geben Sie ein Beispiel für ein $\mathcal{L}^2$ -beschränktes stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t \geq 0}$ an (d.h. es gilt $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$), das kein Martingal ist.

[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. eine dreidimensionale Brownsche Bewegung (B_t) mit Startpunkt $B_0 \neq 0$ und untersuchen Sie $M_t = 1/\|B_t\|$ (wobei $\|(x_1, x_2, x_3)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm bezeichnet). Sie können die Verteilung von $\|B_t\|$ und damit auch von M_t leicht explizit bestimmen, wenn Sie annehmen, dass B_0 dreidimensional standard-normalverteilt ist, oder Sie können bei festem Startpunkt $B_0 = x \neq 0$ die auftretenden Integrale „grob von Hand“ abschätzen.]

Aufgabe 7.3 (Eigenschaften harmonischer Funktionen via Brownsche Bewegung)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch (d.h. $\Delta f(x) \equiv 0$) und beschränkt. Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung zusammen mit dem Martingalkonvergenzatz um zu zeigen, dass f konstant ist.

b) Sei $f(z)$ ein nicht-konstantes Polynom in z . Verwenden Sie Eigenschaften der zweidimensionalen Brownschen Bewegung um zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \varepsilon\} \neq \emptyset$. Folgern Sie, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$ gibt.

Aufgabe 7.4 (Auftreffverteilung der 2-dim. BB auf einem Kegel) a) Sei $(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geq 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung,

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t^{(2)} = 0\}$$

der Zeitpunkt des Auftreffens auf der x -Achse. Zeigen Sie: Bei Start in $(B_0^{(1)}, B_0^{(2)}) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ besitzt die Verteilung von $B_\tau^{(1)}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|y_0|}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

[Hinweis. Verwenden Sie, dass gemäß Aufg. 2.2 b) gilt

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda\tau)] = \exp(-y_0\sqrt{2\lambda})$$

und dass $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ unabhängig sind, um $\mathbb{E}[\exp(i\lambda B_\tau^{(1)})]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.]

b) Sei $\alpha \in (0, \pi)$, $K_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x > y/\tan(\alpha)\}$ ein Kegel mit Öffnungswinkel α , $(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geq 0}$ zweidimensionale Brownsche Bewegung, $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \in \partial K_\alpha\}$ der Zeitpunkt des Auftreffens im Kegelrand. Für $(x, y) \in K_\alpha$, $p > 0$ gilt

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[|(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})|^p] < \infty \iff p\alpha < \pi$$

(Wenn Sie möchten, können Sie auch die Verteilung von $(B_\tau^{(1)}, B_\tau^{(2)})$ explizit bestimmen.)

[Hinweis. Fassen Sie K_α als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, die Abbildung $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ bildet K_α konform auf die obere Halbebene ab.]

Aufgabe 7.5 (Beispiele fairer Optionspreise) Bestimmen Sie im Black-Scholes-Merton-Modell (mit instantanem Renditeparameter μ , Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate r) die fairen Preise der europäischen Optionen mit Laufzeit T und Auszahlungsprofilen (für einen gewissen „Ausübungspreis“ $K > 0$)

$$h_1(S_T) = (K - S_T)^+, \quad h_2(S_T) = S_T \wedge K, \quad h_3(S_T) = |S_T - K|, \quad h_4(S_T) = (K - |S_T - K|)^+$$

(im Jargon sind dies Put, Covered Call, Straddle und Butterfly).

[Hinweis. Stellen Sie die Auszahlungsprofile als geeignete Linearkombinationen von S_T und Call-Optionen dar. Man kann alle Preisformeln im Prinzip explizit machen (als algebraische Ausdrücke, die die Verteilungsfunktion der Normalverteilung beinhalten), für eine übersichtliche Darstellung mag es angenehmer zu sein, den Preis einer Call-Option als „Elementarfunktion“ zu betrachten.]

Aufgabe 7.6 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess) Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ die eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t$$

mit $b \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \infty)$ und (B_t) einer eindimensionalen Brownbewegung.

a) Zeigen Sie

$$X_t = e^{-bt} \left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{bs} dB_s \right)$$

und folgern Sie: Bei Start in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}(X_t) = \mathcal{N}(x_0 e^{-bt}, \sigma^2(1 - e^{-2bt})/(2b))$. Unter welchen Bedingungen konvergiert X_t in Verteilung für $t \rightarrow \infty$, und gegen was?

b) Sei $\mathcal{L}(X_0) = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ für ein $\sigma_0 \geq 0$ (mit der Interpretation $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$). Bestimmen Sie die Kovarianzstruktur $c(s, t) := \mathbb{E}[X_s X_t]$. Unter welchen Bedingungen ist (X_t) dann stationär?

Aufgabe 7.7 ([squared-]Bessel-Prozesse) Sei $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(d)})$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt $W_0 = w_0$, $Z_t := \|W_t\|^2$.

a) Z ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = 2\sqrt{Z_t} dB_t + b dt, \quad Z_0 = z_0 = \|w_0\|^2 \tag{1}$$

wo $b = d$ und (B_t) eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung.

Folgern Sie: Für $b = 1$ gilt $\sup\{t : Z_t = 0\} = \infty$ f.s., für $b = 2$ gilt $\liminf_{t \rightarrow \infty} Z_t = 0$ f.s., für $b \in \{3, 4, \dots\}$ gilt $Z_t > 0$ für alle $t > 0$ f.s.

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Itô-Formel und benutzen Sie Lévy's Charakterisierung um zu prüfen, dass der Prozess $\sum_{i=1}^d \int_0^t W_s^{(i)} / \|W_s\| dW_s^{(i)}$ eine Brownsche Bewegung ist.]

b) Seien Z' und Z'' Lösungen von (1) mit $Z'_0 = z'_0$, $Z''_0 = z''_0$ und $b = b'$ bzw. $b = b'' \in \mathbb{R}_+$, aber unabhängigen treibenden Brownschen Bewegungen B' bzw. B'' . Dann ist $Z_t := Z'_t + Z''_t$ eine (schwache) Lösung von (1) mit Startpunkt $Z_0 = z'_0 + z''_0$ und $b = b' + b''$.

[*Hinweis.* Betrachten Sie $\beta_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s > 0\}} \sqrt{Z'_s / Z_s} dB'_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s > 0\}} \sqrt{Z''_s / Z_s} dB''_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s = 0\}} d\tilde{B}_s$, wo $\tilde{B}$ eine weitere, unabhängige Brownsche Bewegung ist.]

c) Welche stochastische Differentialgleichung löst der Prozess $Y_t = \sqrt{Z_t}$?