

# Stochastik III

Notizen zu einer Vorlesung an der  
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Sommer 2022

Matthias Birkner

Vorläufige Version, 13. Juli 2022

Kommentare, Korrekturvorschläge, Hinweise auf (Tipp-)fehler gerne per Email an  
`birkner@mathematik.uni-mainz.de` senden

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Brownsche Bewegung</b>                                   | <b>2</b>  |
| 1.1      | Grundlegendes . . . . .                                     | 2         |
| 1.2      | Starke Markov-Eigenschaft und Folgerungen . . . . .         | 8         |
| 1.3      | Donskers Invarianzprinzip . . . . .                         | 14        |
| <b>2</b> | <b>Stochastische Integration</b>                            | <b>18</b> |
| 2.1      | Zur Motivation . . . . .                                    | 18        |
| 2.2      | (Einige Eigenschaften) zeitstetige(r) Martingale . . . . .  | 19        |
| 2.3      | Stochastisches Integral . . . . .                           | 27        |
| 2.4      | Semimartingale, etc. . . . .                                | 37        |
| 2.5      | Itô-Formel (und einige Anwendungen) . . . . .               | 43        |
| 2.6      | Brownsche Bewegung und harmonische Funktionen . . . . .     | 53        |
| 2.7      | Zur Black-(Merton-)Scholes-Formel . . . . .                 | 60        |
| 2.8      | Maßwechsel und Girsanov-Transformation . . . . .            | 66        |
| <b>3</b> | <b>Stochastische Differentialgleichungen</b>                | <b>71</b> |
| 3.1      | Martingalprobleme und schwache Lösungen von SDGln . . . . . | 85        |
| <b>A</b> | <b>Ergänzung: Markovprozesse und Martingalprobleme</b>      | <b>93</b> |
| A.1      | Dualität . . . . .  | 97        |

Ich danke Clara Bröer, Matthias Liesenfeld, Matthias Muth, Stella Preußler, Ilka Reinhard, Timo Schlüter, Jan Weldert und Carina Zeller, die durch ihre kritische Lektüre voriger Versionen dieser Notizen an verschiedenen Stellen zur Korrektur von Ungenauigkeiten und Tippfehlern und zur Präzisierung von Formulierungen beigetragen haben.

# Kapitel I

## Brownsche Bewegung

### I.1 Grundlegendes

**Definition 1.1.** Ein stochastischer Prozess  $(B_t)_{t \geq 0}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^d$  heißt ( $d$ -dimensionale) Brownsche Bewegung, falls gilt

$$\begin{aligned} &\text{für } n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \text{ sind } B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \text{ unabhängig} \\ &\text{mit } B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t_i - t_{i-1})I_d) \end{aligned} \quad (1.1)$$

und  $t \mapsto B_t$  ist stetig.

**Erinnerung 1.2.** [Kl, Bsp. 14.48] (und analog [St2, Bsp. 6.18] und [St2, Ber. 6.19]) konstruiert auf  $\Omega = \mathbb{R}^{[0, \infty)} = \{\omega : \omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}$ , ausgestattet mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}^{\otimes [0, \infty)}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass der durch die kanonischen Projektionen  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X_t(\omega) = \omega(t)$  definierte stochastische Prozess  $X = (X_t)_{t \in [0, \infty)}$  die Bedingung (1.1) erfüllt. (Es wurde dazu geprüft, dass die Brownsche Halbgruppe von Übergangskernen  $\kappa_t(x, dy) = \mathcal{N}(x, t)(dy)$  eine konsistente Familie von endlich-dimensionalen Verteilungen erzeugt und dann Kolmogorovs Erweiterungssatz, [Kl, Satz 14.39] verwendet.) Die Frage, ob ein solcher Prozess stetige Pfade hat bzw. haben kann, blieb dort (zunächst) offen.

In [St2, Kap. 7] hatten wir die Existenz stetiger Pfade via Lévy-Konstruktion bewiesen (vgl. [St2, Satz 7.2]); wir betrachten hier nun einen etwas allgemeineren Ansatz.

**Definition 1.3.** Seien  $X = (X_t)_{t \geq 0}, Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  stochastische Prozesse mit demselben Wertebereich, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  definiert sind.

1.  $Y$  heißt *Modifikation* oder *Version* von  $X$  (und umgekehrt), falls

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{gilt.}$$

2.  $X$  und  $Y$  heißen *ununterscheidbar*, falls es ein  $N \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(N) = 0$  gibt, so dass für jedes  $t \geq 0$  gilt  $\{X_t \neq Y_t\} \subset N$ .

**Bemerkung 1.4.** Offenbar gilt

$X$  und  $Y$  ununterscheidbar  $\Rightarrow X$  und  $Y$  sind einander Modifikationen,

die Umkehrung gilt i.A. nicht (ändere z.B. einen stetigen Pfad zu einer  $\text{unif}([0, 1])$ -verteilten Zeit willkürlich ab).

Die Umkehrung gilt, wenn wir (z.B.) a priori wissen, dass  $X$  und  $Y$  (f.s.) rechtsstetige Pfade besitzen, denn dann gilt

$$X_t = \lim_{s \searrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s = \lim_{s \searrow t, s \in \mathbb{Q}} Y_s = Y_t \quad \text{auf} \quad \bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+} \{X_s = Y_s\}.$$

und  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+} \{X_s = Y_s\}\right) = 1$ .

**Erinnerung.**  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt *Hölder-stetig* von der Ordnung  $\gamma (> 0)$ , falls es ein  $C < \infty$  gibt mit

$$\forall s, t : \|f(s) - f(t)\| \leq C|s - t|^\gamma.$$

$f$  heißt lokal Hölder-stetig, falls für jedes  $T > 0$  die Funktion  $f(\cdot \wedge T)$  Hölder-stetig ist.

**Satz 1.5** (Kolmogorov-Chentsov<sup>1</sup>).  $X = (X_t)_{t \geq 0}$   $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess, es gebe  $\alpha, \beta > 0$  und für jedes  $T > 0$  ein  $C_T < \infty$  mit

$$\mathbb{E}[\|X_t - X_s\|^\alpha] \leq C_T |t - s|^{1+\beta} \quad \text{für } s, t \in [0, T].$$

1. Dann gibt es eine Modifikation  $\tilde{X}$  von  $X$ , die lokal Hölder-stetige Pfade besitzt von jeder Ordnung  $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$
2. Für  $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ ,  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $K = K(\varepsilon, T, \alpha, \beta, \gamma, C_T) < \infty$  mit

$$\mathbb{P}(\|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\| \leq K|t - s|^\gamma \text{ für alle } s, t \in [0, T]) \geq 1 - \varepsilon.$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $X$  für jedes  $T > 0$  eine auf  $[0, T]$  (Hölder-)stetige Modifikation  $X^{(T)}$  besitzt, denn dann sind  $X^{(T)}$  und  $X^{(T')}$  für  $T > T'$  ununterscheidbar (vgl. Bem 1.4),

$$N := \bigcup_{T, T' \in \mathbb{N}, T < T'} \{\exists t \leq T : X_t^{(T)} \neq X_t^{(T')}\}$$

ist Nullmenge und  $\tilde{X}_t := X_t^{(T)}$  für  $T \in \mathbb{N}$  mit  $T > t$  ist auf  $N^c$  wohldefiniert (setze z.B.  $\tilde{X}_t = 0$  auf  $N$ ).

Sei im Folgenden  $d = 1$  und  $T = 1$  (zur Vereinfachung der Notation).

Mit Markov-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-\alpha} C_1 |t - s|^{1+\beta}, \tag{1.2}$$

<sup>1</sup>Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987; Nikolai Nikolaevich Chentsov, 1930–1993

insbes.  $X_t \rightarrow X_s$  für  $t \rightarrow s$  stochastisch (für jedes  $s \in [0, \infty)$ ).

Die zentrale Idee ist,  $\tilde{X}_t$  zunächst auf dyadisch rationalen Zahlen  $t$  zu konstruieren und dann stetig fortzusetzen. Sei dazu

$$D_n := \{k/2^n : k = 0, 1, \dots, 2^n\}, \quad D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n, \quad \gamma \in (0, \beta/\alpha),$$

zeige

$$C := \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq 1 \\ s, t \in D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} < \infty \quad \text{f.s.} \quad (1.3)$$

Sei

$$\xi_n := \max_{k=1, \dots, 2^n} |X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}|,$$

$$\mathbb{P}(\xi_n \geq 2^{-\gamma n}) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}(|X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}) \stackrel{(1.2)}{\leq} 2^n (2^{-\gamma n})^{-\alpha} C_1 (2^{-n})^{1+\beta} = C_1 2^{(\alpha\gamma - \beta)n},$$

also

$$\sum_n \mathbb{P}(\xi_n \geq 2^{-\gamma n}) < \infty$$

(denn  $\alpha\gamma - \beta < 0$ ) und

$$C_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\xi_n}{2^{-\gamma n}} < \infty \quad \text{f.s.}$$

(mit Borel-Cantelli ist  $\xi_n \leq 2^{-\gamma n}$  für  $n \geq N_0 = N_0(\omega)$ ).

Seien  $s, t \in D$ ,  $s < t$  mit  $2^{-m-1} < |t - s| \leq 2^{-m}$  (für ein geeign.  $m$ ):

$\exists \ell \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_{\ell-1} \in D$  mit

$$s =: t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell := t, \quad t_i - t_{i-1} = 2^{-n_i} \quad \text{mit } n_i > m$$

$$\text{und } \forall n > m : \#\{1 \leq i \leq \ell : n_i = n\} \leq 2$$

(beispielsweise via dydische Entwicklung von  $s, t$  zu beweisen<sup>2</sup>) d.h.

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq \sum_{i=1}^{\ell} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \leq 2 \sum_{n>m} \xi_n \\ &\leq 2C_0 \sum_{n>m} 2^{-\gamma n} = \frac{2C_0}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-\gamma(m+1)} \leq \frac{2C_0}{1 - 2^{-\gamma}} |t - s|^\gamma \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Sei o.E.  $s < t$ . Wir können  $s = \sum_{i=1}^k a_i 2^{-i}$ ,  $t = \sum_{i=1}^k b_i 2^{-i}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_i, b_i \in \{0, 1\}$  schreiben, wobei  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  lexikographisch größer ist als  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , d.h. es gibt ein  $k' < k$  mit  $a_1 = b_1, \dots, a_{k'-1} = b_{k'-1}$ ,  $a_{k'} = 0 < b_{k'} = 1$ . Sei  $t' := \sum_{i=1}^{k'} b_i 2^{-i}$  (somit  $s < t' \leq t$ ). Wegen  $0 < t' - s \leq 2^{-m}$  können wir schreiben  $t' = s + 2^{-n'_1} + 2^{-n'_2} + \dots + 2^{-n'_{\ell'}}$  für gewisse  $n'_1 > n'_2 > \dots > n'_{\ell'} > m$  (wir eliminieren, von der am weitesten rechts stehenden 1 beginnend, die 1er rechts der  $k'$ -ten Stelle in der Binärentwicklung von  $s$ ); weiterhin können wir  $t = t' + 2^{-n''_1} + 2^{-n''_2} + \dots + 2^{-n''_{\ell''}}$  schreiben für gewisse  $m < n''_1 < \dots < n''_{\ell''}$  (wir fügen zur Binärdarstellung von  $t'$  nacheinander diejenigen 1er hinzu, die daraus die Binärdarstellung von  $t$  machen). Die sich daraus ergebende Darstellung von  $t - s = (t' - s) + (t - t')$  leistet das Gewünschte.

und (1.3) gilt und insbesondere ist

$$D \in t \mapsto X_t \quad (\text{f.s.}) \text{ gleichm\u00e4\u00dfig stetig.}$$

Setze

$$\tilde{X}_t := \lim_{u \rightarrow t, u \in D} X_u, \quad t \in [0, 1]$$

(der Grenzwert existiert, denn sei  $(u_n) \subset D$  mit  $u_n \rightarrow t$ , so ist  $(X_{u_n})$  Cauchy-Folge), es gilt

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} \leq C$$

(verwende (1.3) und die Approximationsdef.), f\u00fcr  $t \in [0, 1]$ ,  $s \in D$ ,  $\varepsilon > 0$  ist

$$\mathbb{P}(|X_t - \tilde{X}_t| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|X_s - \tilde{X}_t| \geq \varepsilon/2) \xrightarrow{s \rightarrow t, s \in D} 0,$$

also  $\mathbb{P}(X_t \neq \tilde{X}_t) = 0$ , d.h. i. gilt.

2. folgt aus obigem Beweis, da  $C = C(\omega)$  aus (1.3) f.s. endlich ist. □

**Bemerkung 1.6.** Wir sehen aus dem Beweis, dass Satz 1.5 analog f\u00fcr jeden vollst\u00e4ndigen metrischen Raum als Wertebereich gilt.

**Korollar 1.7.** Die Brownsche Bewegung  $B = (B_t)$  (im Sinne von Def. 1.1) existiert, mit der Zusatzannahme  $B_0 = \mathbf{0}$  ist die Verteilung eindeutig bestimmt („Standard-Brownsche Bewegung“).  $B$  hat f.s. lokal H\u00f6lder-stetige Pfade der Ordnung  $\gamma$  f\u00fcr jedes  $\gamma < 1/2$ .

Die Verteilung der Brownschen Bewegung ist ein  $W$ -Ma\u00df auf  $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ , sie hei\u00dft auch das ( $d$ -dimensionale) Wiener<sup>3</sup>-Ma\u00df.

*Beweis.* Betrachte zun\u00e4chst  $d = 1$ . In [Stz, Bsp. 6.18] (oder in [Kl, Bsp. 14.48]), vgl. Erinnerung 1.2 wurde ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  (auf  $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$ ) konstruiert, der (1.1) erf\u00fcllt.

Es ist f\u00fcr  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2n}] = \mathbb{E}[(\sqrt{|t - s|}Z)^{2n}] = |t - s|^n \mathbb{E}[Z^{2n}]$$

mit  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $\mathbb{E}[Z^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 < \infty$ , Satz 1.5 mit  $\alpha = 2n$ ,  $\beta = n - 1$  liefert Modifikation  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ , die H\u00f6lder-stetig zu jeder Ordnung  $\gamma < \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$  ist.

Sind  $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$  u.a. Kopien der 1-dim. BB, so ist

$$B_t := (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}), \quad t \geq 0$$

eine  $d$ -dim BB. □

---

<sup>3</sup>Norbert Wiener, 1894–1964; N. Wiener, Differential space, *Jour. Math. and Phys. Mass. Inst. Technology* 2, 131–174 (1923)

**Beobachtung 1.8.** 1.  $(B_t)$  ist Standard-Brownsche Bewegung g.d.w.  $B$  zentrierter Gaußscher Prozess (d.h.  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  ist multivariat normalverteilt für jede Wahl von  $t_1 < \dots < t_k, k \in \mathbb{N}$ ) mit stetigen Pfaden und

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = s \wedge t, \quad s, t \geq 0$$

(d-dim. Fall: die Kovarianzmatrix ist  $\text{Cov}[B_{i,s}, B_{j,t}] = \delta_{ij}(s \wedge t)$ ).

2. (Skalierungsinvarianz) Für  $c \neq 0$  ist auch  $\tilde{B}_t := \frac{1}{c} B_{c^2 t}$  Brownsche Bewegung.

3. (Zeitumkehr)  $B$  Standard-Brownsche Bewegung, so ist

$$X_t := \begin{cases} t B_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

ebenfalls Standard-Brownsche Bewegung.

*Beweis.* 1. Sei zunächst  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine (Standard-) Brownsche Bewegung. Für  $0 \leq s \leq t$  gilt

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = \text{Cov}[B_s, B_s + (B_t - B_s)] = \text{Var}[B_s] + \text{Cov}[B_s, B_t - B_s] = s + 0 = s = s \wedge t.$$

Die Umkehrung folgt aus der Tatsache, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen eines (zentrierten) Gaußschen Prozesses durch die Kovarianzen festgelegt sind, vgl. z.B. [Kl, Kap. 15.6] oder [St2, Kap. 4.1]

2. Es gilt  $\tilde{B}_0 = 0$ ,  $\tilde{B}$  hat stetige Pfade und für die Kovarianzen gilt

$$\text{Cov}[\tilde{B}_s, \tilde{B}_t] = \frac{1}{c^2} \text{Cov}[B_{c^2 s}, B_{c^2 t}] = \frac{1}{c^2} (c^2 s \wedge c^2 t) = s \wedge t.$$

3.  $(X_t)_t$  ist Gaußscher Prozess,

$$\text{Cov}[X_s, X_t] = st \text{Cov}[B_{1/s}, B_{1/t}] = st \left( \frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t} \right) = t \wedge s \quad \text{für } s, t > 0, \quad (1.4)$$

$$\text{Cov}[X_0, X_t] = 0 = 0 \wedge t. \quad (1.5)$$

Offenbar ist  $t \mapsto X_t$  stetig für  $t > 0$ . Zur Stetigkeit in  $t = 0$ :

$$(X_t : t \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}) \stackrel{d}{=} (B_t : t \in (0, 1] \cap \mathbb{Q})$$

und  $X$  und  $B$  haben beide stetige Pfade in  $(0, 1]$

$$\implies (X_t)_{t \in (0, 1]} \stackrel{d}{=} (B_t)_{t \in (0, 1]}$$

$$\implies \mathbb{P}(X \text{ gleichmäßig stetig auf } (0, 1]) = 1$$

$$\implies \lim_{t \searrow 0} X_t \text{ existiert f.s.}$$

□

Sei

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(B_s, s \leq t), \quad (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0} \text{ die von } B \text{ erzeugte Filtration,} \quad (I.6)$$

$$\mathcal{F}_0^+ := \bigcap_{t > 0} \mathcal{F}_t^0. \quad (I.7)$$

**Satz 1.9** (Blumenthals 0-1-Gesetz).  $\mathcal{F}_0^+$  ist trivial, d.h.  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  für  $A \in \mathcal{F}_0^+$ .

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  setze

$$Y^n := (B_{2^{-n+t}} - B_{2^{-n}})_{0 \leq t \leq 2^{-n}}$$

(mit Werten in  $C([0, 2^{-n}], \mathbb{R})$ ),

$Y^1, Y^2, \dots$  sind unabhängig

(und sogar bis auf deterministische Umskalierung identisch verteilt), also ist

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\sigma(Y^m, m \geq n)}_{=\mathcal{F}_{2^{-n-1}}^0} \quad \text{trivial}$$

(gem. Kolmogorovs 0-1-Gesetz, vgl. z.B. [Kl, Satz 2.37]), demnach ist auch

$$\mathcal{F}_0^+ = \bigcap_{t > 0} \mathcal{F}_t^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{2^{-n}}^0 \quad \text{trivial.}$$

□

**Beispiel 1.10** (ein Bsp. für Anwendung von Satz 1.9). Es gilt

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{f.s.}$$

Insbesondere ist  $B$  f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung  $1/2$  in  $t = 0$  (und ebenso für jedes andere, feste  $t > 0$ ), insbesondere ist der Pfad nicht differenzierbar.

Mit Zeitumkehr (Beob. 1.8, 3.) folgt auch

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \searrow 0} \frac{tB_{1/t}}{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} \limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty$$

und analog

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty,$$

zusammen mit Stetigkeit der Pfade also

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R} : \quad \sup\{t : B_t = x\} = \infty \quad \text{f.s.}$$

(Rekurrenz der 1-dim BB).

*Beweis.* Für  $s > 0, K \in \mathbb{N}$  sei

$$A_{s,K} := \{ \inf\{t > 0 : B_t \geq K\sqrt{t}\} < s \}$$

(offenbar  $A_{s,K} \subset A_{s',K}$  für  $s \leq s'$ ),

$$A_K := \bigcap_{s>0} A_{s,K} = \{ \inf\{t > 0 : B_t \geq K\sqrt{t}\} = 0 \} \in \mathcal{F}_0^+,$$

also  $\mathbb{P}(A_K) \in \{0, 1\}$  gemäß Satz 1.9, wegen

$$\mathbb{P}(A_K) = \lim_{s \downarrow 0} \mathbb{P}(A_{s,K}) \geq \lim_{s \downarrow 0} \inf \mathbb{P}(B_{s/2} \geq K\sqrt{s/2}) = \mathbb{P}(B_1 \geq K) > 0$$

gilt

$$1 = \mathbb{P}(A_K) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{K \in \mathbb{N}} A_K\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right).$$

Für die analoge Aussage über den  $\liminf$  betrachte  $(-B_t)_{t \geq 0}$ . □

**Bericht 1.11.** Detaillierte Auskunft über das Verhalten der Pfade der (eindimensionalen) Brownschen Bewegung geben

das Gesetz vom iterierten Logarithmus

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{f.s.}, \quad \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad \text{f.s.}$$

(beachte: angesichts Beob. 1.8, 3. implizieren sich die beiden Formeln gegenseitig) und Lévy's Stetigkeitsmodul der Brownschen Bewegung:

$$\limsup_{h \searrow 0} \sup_{t \in [0,1]} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{2h \log \frac{1}{h}}} = 1 \quad \text{f.s.} \tag{1.8}$$

## 1.2 Starke Markov-Eigenschaft und Folgerungen

**Definition 1.12.** Eine Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  heißt *rechtsstetig*, wenn  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$  für alle  $t \geq 0$  gilt.

Sei ein stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  gegeben. Wir betrachten die rechtsstetige Vervollständigung der kanonischen Filtration (mit  $\mathcal{F}_u^0 = \sigma(X_s : s \leq u)$ ):

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u^0 \tag{1.9}$$

(diese *ist* rechtsstetig).

**Bemerkung 1.13.** Wenn  $(\mathcal{F}_t^0)$  die kanonische Filtration einer Brownschen Bewegung  $(B_t)$  ist, so entsteht die rechtsstetige Vervollständigung (1.9) durch Hinzunehmen gewisser Nullmengen, es gilt für  $t \geq 0$

$$\text{zu } A \in \mathcal{F}_t \text{ gibt es ein } A' \in \mathcal{F}_t^0 \text{ mit } \mathbb{P}(A \Delta A') = 0.$$

(Für  $t = 0$  folgt dies aus Blumenthals 0-1-Gesetz, Satz 1.9.)

*Beweis.* Wir betrachten o.E. die BB mit Startpunkt  $B_0 = 0$ , wir schreiben  $\mathbb{P}_x$  (und entspr.  $\mathbb{E}_x$ ) für die Situation mit Startpunkt  $B_0 = x$ .

Sei  $A \in \sigma(B_s : s \geq 0)$ ,  $t \geq 0$ , wir zeigen: Es gibt eine beschränkte,  $\mathcal{F}_t^0$ -messbare ZV  $Y$  mit

$$\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] = Y \quad \mathbb{P}_0\text{-f.s.} \quad (1.10)$$

Für  $A \in \mathcal{F}_t$  leistet dann  $A' := \{Y = 1\} \in \mathcal{F}_t^0$  das Gewünschte, denn dann ist

$$\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] = Y \quad \mathbb{P}_0\text{-f.s.}$$

Es genügt, in (1.10) Ereignisse  $A$  der Form

$$A = \{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k, B_{t+s_1} \in D_{k+1}, \dots, B_{t+s_\ell} \in D_{k+\ell}\} \quad (1.11)$$

mit  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ ,  $0 < s_1 < \dots < s_\ell$ ,  $D_1, \dots, D_{k+\ell} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  zu betrachten (diese bilden eine  $\cap$ -stabile Erzeugermenge von  $\sigma(B_s : s \geq 0)$  und die Menge der Ereignisse, für die es ein  $Y$  wie in (1.10) gibt, sind ein Dynkin-System).

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+1/n}^0] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{P}_{B_{t+1/n}}(B_{s_1-1/n} \in D_{k+1}, \dots, B_{s_\ell-1/n} \in D_{k+\ell}) \\ &= \mathbf{1}_{\{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{P}_{B_t}(B_{s_1} \in D_{k+1}, \dots, B_{s_\ell} \in D_{k+\ell}), \end{aligned}$$

wobei wir für das erste Gleichheitszeichen den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (z.B. [Stz, Satz 2.13]) oder [Kl, Satz 12.14]), für das zweite Gleichheitszeichen die schwache Markov-Eigenschaft und für das dritte die Stetigkeit der Pfade ausnutzen. Die rechte Seite ist offenbar  $\mathcal{F}_t^0$ -messbar, d.h. (1.10) gilt.  $\square$

**Erinnerung.** Eine ZV  $\tau$  mit Werten in  $[0, \infty]$  heißt *Stoppzeit* (bezgl.  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ), wenn gilt

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für jedes } t \geq 0.$$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \sigma(\mathcal{F}_u, u \geq 0) : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für jedes } t \geq 0\}$$

ist die  $(\sigma$ -Algebra der)  $\tau$ -Vergangenheit.

**Bemerkung 1.14.** Sei  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  rechtsstetig, dann ist  $\tau$  eine Stoppzeit g.d.w.  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$  für alle  $t \geq 0$  (denn  $\{\tau \leq t\} = \bigcap_n \{\tau < t + 1/n\}$ ).

Weiterhin gilt für jede Folge  $\tau_n$  von Stoppzeiten mit  $\tau_n \searrow_{n \rightarrow \infty} \tau : \mathcal{F}_\tau = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$

Bem.: im Allgemeinen ist  $\inf\{t > 0 : X_t \notin [a, b]\}$  keine  $(\mathcal{F}_t^0)$ -Stoppzeit.

**Bemerkung 1.15.** Die Brownsche Bewegung ist ein Martingal (bezüglich der kanonischen Filtration und [anhand von Bem. 1.13] auch bezüglich deren rechtsstetiger Vervollständigung).

**Satz 1.16** (Optional sampling, zeitkontinuierlicher Fall).  $(X_t)_{t \geq 0}$  Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  rechtsstetige Filtration,  $\sigma, \tau$  Stoppzeiten. Wenn  $\tau$  beschränkt ist oder wenn  $(X_t)_{t \geq 0}$  gleichgradig integrierbar ist, so gilt

$$X_\tau \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau} \text{ f.s.}$$

*Beweis.*

$$\sigma_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \sigma + 1 \rfloor, \quad \tau_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor$$

sind Stoppzeiten, die nur abzählbar viele Werte annehmen, und  $\sigma_n \searrow \sigma, \tau_n \searrow \tau$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei  $\tau$  beschränkt,  $\tau \leq T$  für ein festes  $T < \infty$ . Dann ist

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_m}] \geq X_{\sigma_m \wedge \tau_n} \text{ f.s.} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

(optional sampling in diskreter Zeit, z.B. [St2, Satz 1.35] oder [Kl, Satz 10.11 und Satz 10.21]), es gilt  $\bigcap_m \mathcal{F}_{\sigma_m} = \mathcal{F}_\sigma$  (Rechtsstetigkeit der Filtration), also mit  $m \rightarrow \infty$  (und der Rechtsstetigkeit der Pfade von  $X$ )

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau_n} \text{ f.s.} \tag{1.12}$$

Rechtsstetigkeit der Pfade liefert  $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$  f.s., noch zu zeigen ist  $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$  in  $\mathcal{L}^1$ .

Es ist

$$B_k := \mathbb{E}[X_{\tau_k} - X_{\tau_{k+1}} | \mathcal{F}_{\tau_{k+1}}] \geq 0 \quad (\text{f.s.})$$

und

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right] = \mathbb{E}[X_{\tau_0}] - \inf_{k \geq 1} \mathbb{E}[X_{\tau_k}] < \infty,$$

demnach existiert  $A_n := \sum_{k=n}^{\infty} B_k$  (f.s.) und  $M_n := X_{\tau_n} - A_n$  erfüllt  $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}] = M_{n+1}$ , d.h.  $(M_{-m})_{m \in -\mathbb{N}_0}$  ist ein Rückwärtsmartingal (beachte  $\mathcal{F}_{\tau_n} \supset \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$ ). Gemäß Rückwärtsmartingalkonvergenzsatz (z.B. [St2, Satz 2.13] oder [Kl, Satz 12.14]) existiert  $\lim_{m \rightarrow -\infty} M_{-m}$  in  $\mathcal{L}^1$ , insbes. ist  $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$  gleichgradig integrierbar. Wegen  $0 \leq A_n \leq A_0$  mit  $\mathbb{E}[A_0] < \infty$  ist auch  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$  gleichgradig integrierbar,

$$\implies \{X_{\tau_n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist gleichgradig integrierbar}$$

somit gilt auch  $\mathcal{L}^1$ -Konvergenz und mit  $n \rightarrow \infty$  in (1.12) folgt  $\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau}$  f.s.

Sei nun  $\tau$  möglicherweise unbeschränkt und  $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$  gleichgradig integrierbar

$$\implies \exists X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{mit} \quad X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_\infty \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

denn dies gilt längs jeder Folge  $t_k \nearrow \infty$  gemäß (Sub-)Martingalkonvergenzsatz (z.B. [St2, Satz 1.29] oder [Kl, Satz 11.14]), daher kann der Grenzwert nicht von der Folge abhängen.

Da  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^+ = x \vee 0$  konvex ist, ist auch  $(X_t^+)_{t \geq 0}$  ein Submartingal; offensichtlich ist es ebenfalls gleichgradig integrierbar und

$$X_t^+ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_\infty^+ \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

/udem gilt (mit dem Optional sampling-Theorem in diskreter Zeit) für jede Stoppzeit  $\rho$  mit diskretem Wertebereich

$$X_\rho^+ \leq \mathbb{E}[X_\infty^+ | \mathcal{F}_\rho] \text{ f.s. } \forall n \in \mathbb{N}$$

Weiter gibt es (wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit) ein streng monoton wachsendes, konvexes  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)/x = \infty$  und  $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\varphi(X_t^+)] < \infty$  (vgl. [Stz, Erinnerung 1.31] oder [Kl, Satz 6.19]), mit Lemma von Fatou

$$\mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+)] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(X_t^+)] < \infty$$

und somit für jedes  $n$  (wir verwenden die Jensensche Ungleichung für die zweite Ungleichung)

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{\tau_n \wedge n}^+)] \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(\mathbb{E}[X_\infty^+ | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge n}]\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+) | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge n}]\right] = \mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+)] (< \infty).$$

Demnach ist  $\{X_{\tau_n \wedge n}^+ : n \in \mathbb{N}\}$  gleichgradig integrierbar wir finden

$$\begin{aligned} X_{\tau \wedge \sigma} &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n \wedge \sigma \wedge n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma]) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma] \\ &\leq \mathbb{E}[X_\tau^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \mathbb{E}[X_\tau^- | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung wie in (1.12) argumentieren und für die dritte das Lemma von Fatou verwenden.  $\square$

**Beispiel 1.17.** Sei  $B$  Standard-Brownsche Bewegung,  $\tau_x := \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$  (mit Bsp. 1.10) ist  $\tau_x < \infty$  für alle  $x$ .

Für  $a, b > 0$  gilt

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{b}{a+b}.$$

*Beweis.* (Wir verwenden dasselbe „klassische“ Martingal-Argument wie im Fall der gewöhnlichen Irrfahrt.) Sei  $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$ , startend von  $B_0 = 0 \in (-a, b)$  ist  $(B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$  beschränktes, insbesondere gleichgradig integrierbares Martingal, also

$$\mathbb{E}[B_\tau] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[B_{t \wedge \tau}] = \mathbb{E}[B_0] = 0,$$

andererseits ist

$$\mathbb{E}[B_\tau] = -a\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) + b\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) = b - (a+b)\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b).$$

$\square$

Wir schreiben  $\mathbf{P}_x$  für die Verteilung von  $(B_t + x)_{t \geq 0}$ , wobei  $B$  Standard-Brownsche Bewegung,  $\mathbb{E}_x$  für Erwartungswerte unter  $\mathbf{P}_x$ .

**Satz 1.18.** Die Brownsche Bewegung  $(B_t)$  mit Verteilungen  $(\mathbf{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  besitzt die starke Markov-Eigenschaft, d.h.

$$\mathbb{E}_x[F((B_{t+\tau})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] \quad (f.s.)$$

für  $F : (\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. und messbar,  $\tau$  f.s. endliche Stoppzeit.

(Die schwache Markov-Eigenschaft ist klar, vgl. z.B. [Stz, Bsp. 6.18] oder [Kl, Kap. 14.4, speziell Bsp. 14.48], siehe auch Erinnerung 1.2.)

*Beweis.* Es genügt, Funktionen

$$F(B) = f(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \quad \text{und } f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ ste., beschr.}$$

zu betrachten (Erwartungswerte solcher Funktionen legen die Vert. auf  $(\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}$  fest).

$$x \mapsto \mathbb{E}_x[F(B)] \quad \text{ist stetig und beschränkt}$$

(verw. explizite Form als Gaußsches Integral).

$\tau_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor$  ist Stoppzeit,  $\tau_n \searrow \tau$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] &= \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_n+t_1}, \dots, B_{\tau_n+t_k}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] \\ &= \mathbb{E}_{B_{\tau_n}}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] \end{aligned}$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden, dass Markov-Prozesse in diskreter Zeit (wir verwenden hier  $2^{-n}\mathbb{N}_0$ ) stets die starke Markov-Eigenschaft besitzen (vgl. [Stz, Satz 6.26] oder [Kl, Satz 17.14]) und für die Konvergenzaussage die Pfadstetigkeit von  $B$  ausnutzen.

Weiter ist

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \left[ \left| \mathbb{E}_x[F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] - \mathbb{E}_x[F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[ \left| F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) - F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Stetigkeit der Pfade von } B), \end{aligned}$$

also

$$\mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] = \mathbb{E}_x[F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau]$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden, dass  $\bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$  (Rechtsstetigkeit der Filtration). □

**Bemerkung 1.19.** Abstrakt betrachtet entnehmen wir dem Beweis von Satz 1.18: Wenn ein Markov-Prozess  $X$  rechtsstetige Pfade hat und die zugehörige Übergangshalbgruppe die Feller-Eigenschaft<sup>4</sup> besitzt (d.h. sie bildet stetige Funktionen in stetige Funktionen ab), so besitzt  $X$  auch die starke Markov-Eigenschaft.

---

<sup>4</sup>Eine Halbgruppe  $(P_t)_{t \geq 0}$  von positiven Kontraktionsoperatoren auf einem lokalkompakten Raum  $E$  heißt eine Fellersche Halbgruppe (benannt nach William Feller, 1906–1970), vgl. z.B. [Kl, Kap. 21.4, insbes. Def. 21.26] oder [Ka, Ch. 19] (die Def. ist auf S. 369), wenn  $P_t(C_0(E)) \subset C_0(E)$  wobei  $C_0(E) = \{\text{stetige Funktionen auf } E, \text{ die im Unendlichen verschwinden}\}$  und  $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$  für jedes  $x \in E$ ,  $f \in C_0(E)$  gilt (dies impliziert  $P_t f \rightarrow f$  für  $t \rightarrow 0$  im Sinne der Sup-Norm für jedes  $f \in C_0(E)$ , d.h. starke Stetigkeit der Halbgruppe, z.B. [Ka, Thm. 19.6]).

**Satz 1.20** (Spiegelungsprinzip). *B* eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, für  $a > 0, T > 0$  gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} B_t \geq a\right) = 2\mathbb{P}(B_T \geq a).$$

*Beweis.* Sei  $\tau$  f.s. endliche Stoppzeit, zeige

$$\tilde{B}_t := B_{\tau \wedge t} - (B_t - B_{\tau \wedge t}), \quad t \geq 0 \quad \text{ist ebenfalls BB.} \quad (1.13)$$

Sei  $B^\tau = (B_t^\tau)_t := (B_{t \wedge \tau})_t$  (gestoppte BB),  $B'_t := B_{\tau+t} - B_\tau$  ist BB, u.a. von  $\mathcal{F}_\tau$  (starke Markov-Eigenschaft, Satz 1.18), also

$$(\tau, B^\tau, B') \stackrel{d}{=} (\tau, B^\tau, -B').$$

Wegen  $B_t = B_t^\tau + B'_{(t-\tau)^+}$ ,  $\tilde{B}_t = B_t^\tau - B'_{(t-\tau)^+}$  folgt (1.13).

Sei  $M_t := \sup_{s \leq t} B_s$ ,  $\tau := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$ . Nach obigem ist

$$\mathbb{P}(M_T \geq a, B_T < a) = \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T > a) = \mathbb{P}(B_T > a),$$

also

$$\mathbb{P}(M_T \geq a) = \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T < a) + \underbrace{\mathbb{P}(M_T \geq a, B_T > a) + \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T = a)}_{=0} = 2\mathbb{P}(B_T > a).$$

□

**Satz 1.21** (Lévy's Arcussinus-Gesetz). *B* eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung,  $T > 0$ ,  $\zeta_T := \sup\{t \leq T : B_t = 0\}$ .

$$\mathbb{P}(\zeta_T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t/T}), \quad 0 \leq t \leq T$$

Beachte:  $\zeta_T$  hat Dichte  $\frac{1}{\pi T} 1/\sqrt{(t/T)(1-t/T)}$ , d.h. Beta( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ) umskaliert auf  $[0, T]$  (denn  $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ), insbesondere ist  $\zeta_T$  symmetrisch um  $T/2$  verteilt.

*Beweis.* Sei o.E.  $T = 1$  (verwende Skalierungseigenschaft der BB).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_1 \leq t) &= \mathbb{P}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (t, 1]) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (t, 1] \mid B_t = a) \mathbb{P}(B_t \in da) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_{|a|}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (0, 1-t]) \mathbb{P}(B_t \in da) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|a|}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (0, 1-t]) &= \mathbb{P}_0\left(\inf_{s \leq 1-t} B_s > -|a|\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(\sup_{s \leq 1-t} B_s < |a|\right) = 1 - 2\mathbb{P}_0(B_{1-t} > |a|) = \mathbb{P}_0(|B_{1-t}| \leq |a|) \end{aligned}$$

gemäß Spiegelungsprinzip (Satz 1.20). Demnach (mit  $B'$  einer u.a. Kopie der BB und  $X, Y$  u.a.,  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_1 \leq t) &= \mathbb{P}(|B'_{1-t}| \leq |B_t|) = \mathbb{P}(\sqrt{1-t}|Y| \leq \sqrt{t}|X|) = \mathbb{P}(Y^2 \leq t(X^2 + Y^2)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)/2} \mathbf{1}_{\{y^2 \leq t(x^2+y^2)\}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{1}_{\{\sin^2(\varphi) \leq t\}} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile in Polarkoordinaten integrieren (beachte  $y^2/(x^2+y^2) = \sin^2(\varphi)$ ).  $\square$

### 1.3 Donskers Invarianzprinzip

Seien  $X_1, X_2, \dots$  u.i.v. reelle ZVn mit  $\mathbb{E}[X_1] = 0, \text{Var}[X_1] = 1$ ,

$$S_t := \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} X_k + (t - \lfloor t \rfloor) X_{\lfloor t \rfloor + 1}, \quad t \geq 0.$$

$(S_t)_{t \geq 0}$  ist eine ZV mit Werten in den stetigen Pfaden.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist folgender Satz, sozusagen ein „großer Bruder des ZGWS“. Wir betrachten als Wertebereich  $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$  mit Metrik  $d(f, g) := \|f - g\|_{\infty}$ ; dies ist ein polnischer Raum (für Separabilität verwende z.B. Polynome mit rationalen Koeffizienten).

**Satz 1.22** (Donskers Invarianzprinzip). *Es gilt*

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} (B_t)_{t \in [0,1]}$$

mit  $(B_t)$  Standard-Brownbewegung

Wir führen den Beweis durch Einbettung, dazu benötigen wir folgendes Lemma.

**Lemma 1.23** (Skorokhod<sup>5</sup>-Einbettung).  *$X$  reelle ZV mit  $\mathbb{E}[X] = 0, \text{Var}[X] = \sigma^2 < \infty$ , dann gibt es eine Stoppzeit  $\tau$  mit*

$$\mathcal{L}(B_{\tau}) = \mathcal{L}(X) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\tau] = \sigma^2.$$

Die Forderung  $\mathbb{E}[\tau] = \sigma^2 (< \infty)$  ist entscheidend, sonst könnte man das Problem ziemlich trivial lösen via  $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = X\}$  mit  $X$  unabhängig von  $B$ .

*Beweis.* Für  $\mathcal{L}(X) = \frac{b}{a+b} \delta_{-a} + \frac{a}{a+b} \delta_b$  mit  $a, b > 0$  (also  $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}[X^2] = ab$  liefert

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$$

das Gewünschte (Übungsaufgabe, vgl. auch Bsp. 1.17; die entscheidende Beobachtung ist, dass  $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$  ein Martingal ist).

<sup>5</sup>Anatoly Volodomyrovych Skorokhod, 1930–2011

Der allgemeine Fall durch Mischung :

Sei  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = \sigma^2 < \infty$ , dann gibt es  $\theta \in \mathcal{M}_1((-\infty, 0] \times [0, \infty))$  mit

$$\mu = \int_{(-\infty, 0] \times [0, \infty)} \left( \frac{v}{v-u} \delta_u + \frac{-u}{v-u} \delta_v \right) \theta(d(u, v)). \quad (I.14)$$

Sei  $m := \int_{(0, \infty)} v \mu(dv) = - \int_{(-\infty, 0)} u \mu(du)$ ,

$$\theta(d(u, v)) := \frac{1}{m} (v-u) \mu(du) \mu(dv) + \mu(\{0\}) \delta_{(0,0)}(du, dv), \quad v \geq 0, u \leq 0$$

leistet das Gewünschte:

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} \theta(d(u, v)) &= \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \int_{(0, \infty)} \mu(dv) (v-u) \\ &= \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) (m - u \mu((0, \infty))) = \frac{1}{m} (m \mu((-\infty, 0)) + m \mu((0, \infty))) = \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \end{aligned}$$

d.h.  $\mu$  ist ein W<sup>3</sup>maß und

$$\begin{aligned} &\int_{(-\infty, 0] \times [0, \infty)} \left( \frac{v}{v-u} \delta_u + \frac{-u}{v-u} \delta_v \right) \theta(d(u, v)) \\ &= \mu(\{0\}) \delta_0 + \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \int_{(0, \infty)} \mu(dv) (v \delta_u - u \delta_v) \\ &= \mu(\{0\}) \delta_0 + \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \delta_u + \int_{(0, \infty)} \mu(dv) \delta_v = \mu. \end{aligned}$$

Sei  $(U, V) \sim \theta$ , u.a. von  $(B_t)_{t \geq 0}$ , dann leistet

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = U \text{ oder } B_t = V\}$$

das Gewünschte. □

*Beweis von Satz I.22.* Sei  $(B_t)_{t \geq 0}$  Standard-BB, konstruiere mittels Skorokhod-Einbettung (Lemma I.23) und der starken Markov-Eigenschaft (Satz I.18) Folge von Stoppzeiten  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  so dass mit  $\tilde{X}_n := B_{\tau_n} - B_{\tau_{n-1}}$  gilt

$$(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{d}{=} (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\tau_n - \tau_{n-1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist u.i.v. mit } \mathbb{E}[\tau_1 - \tau_0] = 1.$$

Sei

$$\tilde{S}_t := \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \tilde{X}_k + (t - \lfloor t \rfloor) \tilde{X}_{\lfloor t \rfloor + 1}, \quad t \geq 0,$$

also  $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (S_t)_{t \geq 0}$ . Zeige

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{\lfloor r \rfloor} - B_r| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{stochastisch.} \quad (I.15)$$

Es gilt

$$\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\tau_1] = 1 \quad \text{f.s.}$$

(mit dem starken Gesetz der großen Zahlen), also auch  $\frac{\tau_{[r]}}{r} \rightarrow 1$  f.s. für  $r \rightarrow \infty$  und

$$\delta_n := \sup_{0 \leq r \leq n} |\tau_{[r]} - r| \quad \text{erfüllt} \quad \frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.}$$

Sei

$$w(B, t, h) := \sup_{0 \leq u < v \leq t, v-u \leq h} |B_v - B_u|$$

(wir wissen:  $w(B, t, h) \leq C_{t,\gamma} h^\gamma$  f.s. für (jedes)  $\gamma < 1/2$  nach Satz 1.5 und Kor. 1.7).

Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon, h > 0$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{[r]} - B_r| > \varepsilon\right) &\leq \underbrace{\mathbb{P}(w(B, n+nh, nh) > \varepsilon\sqrt{n})}_{= P(w(B, 1+h, h) > \varepsilon) \xrightarrow{h \searrow 0} 0} + \underbrace{\mathbb{P}(\delta_n > nh)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \\ &\quad \text{(Skalierungseigensch. der BB)} \end{aligned}$$

d.h. mit  $n \rightarrow \infty$ , dann  $h \rightarrow 0$  folgt (1.15).

Analog gilt  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{[r]+1} - B_r| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  stochastisch, somit

$$\Delta_n := \sup_{0 \leq r \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} |\tilde{S}_r - B_r| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{stochastisch.}$$

Sei  $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt. Für  $\varepsilon, \delta > 0$  sei

$$F_{\varepsilon, \delta} := \{f \in C([0, 1]) : \forall g \in C([0, 1]) \text{ mit } \|f - g\|_\infty < \delta \text{ gilt } |\varphi(f) - \varphi(g)| < \varepsilon\},$$

es ist  $F_{\varepsilon, \delta} \nearrow C([0, 1])$  für  $\delta \downarrow 0$ . Somit

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(S_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(B_t\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] \right| &= \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(\tilde{S}_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(B_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] \right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(\left(\tilde{S}_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right) - \varphi\left(\left(B_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right|\right] \\ &\leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty (\mathbb{P}(B \notin F_{\varepsilon, \delta}) + \mathbb{P}(\Delta_n \geq \delta)), \end{aligned}$$

mit  $n \rightarrow \infty$ , dann  $\delta \downarrow 0$ ,  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(S_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(B_t\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] \right| = 0.$$

□

**Beispiel 1.24.** I. Für  $f \in C([0, 1])$  sei  $\varphi(f) := \psi(f(1))$  mit einem  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt, so ist

$$E[\varphi(B)] = \mathbb{E}[\psi(B_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(S_{nt}/n^{1/2}\right)_{t \in [0,1]}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\psi\left(S_n/n^{1/2}\right)\right],$$

d.h. Satz 1.22 impliziert den ZGWS.

Analog gilt eine multivariate Form, d.h. für  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt,  $t_1 < \dots < t_k$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\psi(S_{[t_1 n]}/n^{1/2}, S_{[t_2 n]}/n^{1/2}, \dots, S_{[t_k n]}/n^{1/2})] = \mathbb{E}[\psi(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})].$$

2. Für  $f \in C([0, 1])$  sei  $\varphi(f) := \psi(\max_{0 \leq t \leq 1} f(t))$  mit einem  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt, so folgt mit Satz 1.22

$$\max_{r \leq n} \frac{S_r}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \max_{t \leq 1} B_t,$$

mit Satz 1.20 (beachte: die Vert. von  $\max_{t \leq 1} B_t$  hat keine Atome) also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{r \leq n} \frac{S_r}{\sqrt{n}} > x\right) = 2\mathbb{P}(B_1 > x) \quad \text{für } x \in [0, \infty). \quad (1.16)$$

Vgl. auch die explizite Abschätzung für festes  $n$ , z.B. [St2, Satz 6.27] oder [Kl, Satz 17.15, Spiegelungsprinzip in diskreter Zeit]:

$$\mathbb{P}\left(\max_{m \leq n} S_m \geq x\right) \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq x) - \mathbb{P}(S_n = x)$$

(mit Gleichheit, wenn Inkremente nur Werte aus  $\{-1, 0, 1\}$  annehmen); man beachte, dass für (1.16) keine Annahmen an die Verteilung von  $S_1$  über die ersten zwei Momente hinaus benötigt werden (während [St2, Satz 6.27] / [Kl, Satz 17.15] benötigt, dass die Inkremente symmetrisch verteilt sind).

# Kapitel 2

## Stochastische Integration

### 2.1 Zur Motivation

**Integration bezüglich nicht-glatte Pfade** Seien  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  sei stetig. Welchen Sinn können wir  $\int_0^t f_s dg_s$  geben?

1. Falls  $g \in C^1$ :  $\int_0^t f_s dg_s = \int_0^t f_s g'_s ds$  (als Riemann-[Stieltjes-]Integral).
2. Falls  $g$  nicht-fallend (und, sagen wir, rechtsstetig): Fasse  $g$  als Verteilungsfunktion eines Maßes  $\mu_g$  auf  $\mathbb{R}_+$  auf,  $\mu_g((0, t]) = g(t) - g(0)$ , so ist  $\int_0^t f_s dg_s = \int_{(0, t]} f_s \mu_g(ds)$  (als Lebesgue-Stieltjes-Integral, vgl. z.B. [KL, Def. 1.57]).
3. Falls  $g = g_1 - g_2$  mit  $g_1, g_2$  nicht-fallend, so ist  $\int_0^t f_s dg_s = \int_0^t f_s dg_{1,s} - \int_0^t f_s dg_{2,s}$ .

Eine solche sog. Jordan-Zerlegung von  $g$  existiert g.d.w.

$$V_t(g) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k = t} \sum_{i=1}^k |g_{t_i} - g_{t_{i-1}}| < \infty$$

(„ $g$  hat endliche Variation“).

Siehe z.B. [Ka, Prob. 2.18], vgl. auch Bem. 2.7 unten.

Die Pfade der Brownschen Bewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  haben mit W'keit 1 unendliche Variation für jedes  $t > 0$ , denn die quadratische Variation ist  $> 0$ :

$$V_t(B) \geq \sup_n \frac{1}{\sup\{|B_v - B_u| : 0 \leq u < v < u + 2^{-n} \leq t\}} \sum_{k=1}^{2^n} |B_{tk/2^n} - B_{t(k-1)/2^n}|^2 = \infty$$

daher kann man

$$\int_0^t X_s dB_s = ??$$

nicht in obigem Sinne „realisierungsweise“ definieren.

**Vorschau** Im diskreten Fall gilt (unter geeign. Bedingungen, vgl. [Kl, Satz 9.39]):  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Martingal,  $(C_n)$  previsibel, so ist  $(C \bullet M)_n := \sum_{j=1}^n C_j (M_j - M_{j-1})$  ein Martingal.

Wir werden (in Analogie dazu) sehen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_{\frac{k-1}{n}} (B_{\frac{k}{n} \wedge t} - B_{\frac{k-1}{n} \wedge t}) \longrightarrow \int_0^t X_{s(-)} dB_s \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(in geeignetem Sinne, für eine noch zu klärende Klasse von Integranden  $X$ ).

Wir hatten Simulationen von diskreten Approximation zufällige Pfade  $X = (X_t)_t$  betrachtet, die „lokal ungefähr wie eine Brownsche Bewegung“ aussehen, d.h.

$$\mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | X_t = x] = h\mu(x) + o(h), \quad \text{Var}[X_{t+h} - X_t | X_t = x] = h\sigma^2(x) + o(h).$$

für geeignete Funktionen  $\mu$  und  $\sigma^2$  (siehe das in der ersten Sitzung diskutierte R-Skript `reskalierte_MK_und_Diffusionen.R`).

Obiges sog. Itô-Integral wird uns gestatten, solche Prozesse  $X$  als Lösungen von

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

in einem mathematisch präzisen Sinn zu konstruieren.

## 2.2 (Einige Eigenschaften) zeitstetige(r) Martingale

**Definition 2.1.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  stochastischer Prozess (mit Werten in  $(E, \mathcal{B}(E))$ ) auf filtriertem W'raum  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ .

$X$  heißt *adaptiert*, wenn für jedes  $t \geq 0$  gilt:  $X_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -messbar.

$X$  *progressiv messbar*, wenn für jedes  $t \geq 0$  gilt:  $\Omega \times [0, t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$  ist  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ - $\mathcal{B}(E)$ -messbar.

Offensichtlich gilt

$$X \text{ progressiv messbar} \Rightarrow X \text{ adaptiert}$$

sowie

$$X \text{ adaptiert mit (rechts)stetigen Pfaden} \Rightarrow X \text{ progressiv messbar.}$$

Progressive Messbarkeit ist wichtig für das Zusammenspiel mit Stoppzeiten (der zu einer Stoppzeit  $\tau$  ausgewertete Prozess  $X_\tau$  ist an die entsprechende Vergangenheit  $\mathcal{F}_\tau$  adaptiert, vgl. z.B. [RY, Prop. I.(4.8)] oder [Ka, Lemma 7.5]); weiter erlaubt progressive Messbarkeit von  $X$  insbesondere „Analysis-Operationen“ wie  $\int_0^t f(X_s) ds$  (dafür würde es allerdings auch schon ausreichen, dass  $\Omega \times [0, \infty) \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$   $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - $\mathcal{B}(E)$ -messbar ist).

**Definition 2.2.** Ein filtrierter W'raum  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  genügt den *üblichen Bedingungen* (hypothèses habituelles), wenn gilt

1.  $\mathcal{F}_0$  enthält alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen (d.h.  $N \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(N) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{F}_0$ ) und
2.  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtsstetig (d.h.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$  für jedes  $t \geq 0$ ).

**Bemerkung** 1.) erzwingt, dass ein von einem adaptierten Prozess ( $\mathbb{P}$ -)ununterscheidbarer Prozess ebenfalls adaptiert ist.

2.) erzwingt z.B., dass die Zeit des ersten Eintritts in eine offene Menge eine Stoppzeit ist.

Wir werden im Folgenden zumeist stillschweigend annehmen, dass der zugrundeliegende  $W$ -raum die üblichen Bedingungen erfüllt, es sei denn, dass wir explizit abweichende Voraussetzungen formulieren.

**Beispiel 2.3.** Sei  $\Omega = C([0, \infty)) (= \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\})$ ,  $\mathcal{F}_t := \sigma(\omega(s) : s \leq t)$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ,  $\mathbb{W}_x, x \in \mathbb{R}$  das (1-dim) Wienermaß bei Start in  $x$ . (d.h. die Vert. der BB startend in  $x$ , aufgefasst als  $W$ -maß auf  $\Omega$ , siehe Def 1.1 und Kor. 1.7).

Setze  $\overline{\mathcal{F}}_t := \{A \in \mathcal{A} : \exists B \in \mathcal{F}_t \text{ mit } \mathbb{W}_0(A \Delta B) = 0\}, t \geq 0$ . Es gilt

1.  $\mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}}_t$  für  $t \geq 0$
2.  $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtsstetig
3.  $(\Omega, \mathcal{A}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{W}_0)$  erfüllt die üblichen Bedingungen.

(Dies ist eine kleine Ergänzung zu Bem. 1.13, dort hatten wir bereits die rechtsstetige Vervollständigung der kanonischen Filtration der Brownschen Bewegung betrachtet.)

*Beweis.* 1. Zeige

Für  $A \in \mathcal{A}$  gibt es ein beschr.,  $\mathcal{F}_t$ -messbares  $Y$  mit  $\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = Y$   $\mathbb{W}_0$ -f.s. (2.1)

(Bem.: (2.1) kann als eine Verallgemeinerung von Blumenthals 0-1-Gesetz, Satz 1.9 angesehen werden.)

Für

$$A = \{X_{t_0} \in D_0, \dots, X_{t_k} \in D_k, X_{t+s_1} \in D_{k+1}, \dots, X_{t+s_\ell} \in D_{k+\ell}\} \quad (2.2)$$

mit  $k, \ell \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t, 0 < s_1 < \dots < s_\ell, D_1, \dots, D_{k+\ell} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist

$$\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+1/n}] = \mathbf{1}_{\{X_{t_0} \in D_0, \dots, X_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{W}_{X_t}(X_{s_1} \in D_{k+1}, \dots, X_{s_\ell} \in D_{k+\ell}), \quad (2.3)$$

$\mathbb{W}_0$ -f.s. was  $\mathcal{F}_t$ -m.b. ist, d.h. (2.1) gilt für solche  $A$ . Hierbei haben wir für das erste Gleichheitszeichen den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (z.B. [Kl, Satz 12.14]) und für das zweite Gleichheitszeichen die (schwache) Markov-Eigenschaft und die Stetigkeit der Pfade ausgenutzt. Da  $A$ s der Form (2.2) einen  $\cap$ -stabilen Erzeuger von  $\mathcal{A}$  bilden, gilt (2.1).

Für  $A \in \mathcal{F}_{t+}$  ist demnach  $\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = Y$   $\mathbb{W}_0$ -f.s. mit  $Y$   $\mathcal{F}_t$ -m.b., insbes.  $\{Y = 1\} \in \mathcal{F}_t$  und  $\mathbb{W}_0(A \Delta \{Y = 1\}) = 0$ , d.h.  $A \in \overline{\mathcal{F}}_t$ , somit gilt 1.

2. Sei  $A \in \overline{\mathcal{F}}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}$ , insbes. zu  $n \in \mathbb{N}$  gibt es

$$B_n \in \mathcal{F}_{t+1/n} \text{ mit } \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{B_n} \text{ } \mathbb{W}_0\text{-f.s.,}$$

es ist  $B := \limsup_n B_n (= \bigcap_n \cup_{m \geq n} B_m) \in \mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}}_t$  nach 1., also

gibt es ein  $C \in \mathcal{F}_t$  mit  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_C$   $\mathbb{W}_0$ -f.s. und somit  $A \in \overline{\mathcal{F}}_t$  nach Def.,

d.h. 2. gilt.

3. Sei  $\mathbb{W}_0(N) = 0$ , also auch  $\mathbb{W}_0(N \Delta \emptyset) = 0$  mit  $\emptyset \in \mathcal{F}_0$  und somit  $N \in \overline{\mathcal{F}}_0$  nach Def., Rechtssteigkeit von  $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$  wurde in 2. gezeigt.  $\square$

**Proposition 2.4** (Doob-Ungleichungen, zeitstetiger Fall). *Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Martingal oder ein nicht-negatives Submartingal,  $X$  habe rechtsstetige Pfade. Dann gilt für  $t \geq 0$*

1.  $\lambda \mathbb{P}(\sup_{0 \leq u \leq t} X_u \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[|X_t|]$  für  $\lambda \geq 0$ ,
2.  $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$  für  $p \in (1, \infty)$ .

*Beweis.* 1. und 2. gelten im zeitdiskreten Fall (vgl. z.B. [Kl, Satz II.2]).

Sei  $\tilde{\lambda} < \lambda$ . Es ist

$$\tilde{\lambda} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq u \leq t} X_u > \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{m \leq 2^n} X_{mt/2^n} > \tilde{\lambda}) \leq \mathbb{E}[|X_t|] \quad (2.4)$$

wobei wir für das Gleichheitszeichen die (Rechts-)Stetigkeit der Pfade von  $X$  ausgenutzt haben. Mit  $\tilde{\lambda} \nearrow \lambda$  folgt 1.

2. Analog ist

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u|^p] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\max_{m \leq 2^n} |X_{mt/2^n}|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p], \quad (2.5)$$

wobei wir für das Gleichheitszeichen wiederum die (Rechts-)Stetigkeit der Pfade von  $X$  und den Satz von der monotonen Konvergenz verwendet haben.  $\square$

**Definition 2.5.** Ein Martingal  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  heißt *quadratintegrierbar*, wenn  $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$  für alle  $t \geq 0$ .  $\mathcal{M}_2^c$  bezeichne die Menge der quadratintegrierbaren Martingale mit stetigen Pfaden (bezüglich einem vorgegebenen filtrierten  $\mathbb{W}$ raum).

**Definition 2.6.** Für einen (zufälligen oder deterministischen) reellwertigen Pfad  $(X_t)_{t \geq 0}$  heißt

$$V_t(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|$$

die *Totalvariation* (von  $X$  zur Zeit  $t$ ).

$X$  hat *endliche Variation*, wenn  $V_t(X) < \infty$  für alle  $t \geq 0$ .

**Bemerkung 2.7.** 1.  $t \mapsto V_t(X)$  ist nicht-fallend.

2. Falls  $t \mapsto X_t$  nicht-fallend, so ist  $V_t(X) = X_t - X_0 < \infty$ .
3. Haben  $X$  und  $Y$  endliche Variation, so auch  $X + Y$ ,  $X - Y$ .
4.  $X$  hat endliche Variation  $\Leftrightarrow$  es gibt  $Y, Z$  nicht-fallend mit  $X = Y - Z$ .

*Beweis.* 1., 2., 3. und 4. „ $\Leftarrow$ “ sind klar.

Zu 4. „ $\Rightarrow$ “: Für  $t_{i-1} < t_i$  ist  $|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 2(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^- + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ , also gilt für jede Zerlegung

$$\sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 2 \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^- + X_t - X_0.$$

Bilde Supremum über alle Zerlegungen von  $[0, t]$ :

$$V_t(X) = 2V_t^-(X) + X_t - X_0$$

mit  $V_t^-(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}, 0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=t} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^-$ , also

$$X_t = X_0 + V_t(X) - 2V_t^-(X)$$

und  $t \mapsto X_0 + V_t(X)$ ,  $t \mapsto 2V_t^-(X)$  sind nicht-fallend.  $\square$

**Satz 2.8.** Sei  $M$  stetiges Martingal mit  $V_t(M) < \infty$  f.s. für jedes  $t > 0$ . Dann ist  $M$  fast sicher konstant.

*Beweis.* Wir nehmen o.E. an  $M_0 = 0$ , sonst betrachte  $\tilde{M}_t := M_t - M_0$ .

$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\} \wedge \inf\{t \geq 0 : V_t(M) \geq n\}$  ist Stoppzeit und es gilt  $\tau_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} \infty$  f.s.  $M^{(n)} := (M_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$  ist dann ein beschränktes Martingal mit (uniform in  $t$ ) beschränkter Totalvariation.

Sei also o.E.  $M$  beschränkt mit (gleichmäßig) beschränkter Totalvariation.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{2^\ell} M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k,k'=1}^{2^\ell} \mathbb{E}\left[(M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell})(M_{k't/2^\ell} - M_{(k'-1)t/2^\ell})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{2^\ell} (M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell})^2\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\underbrace{\max_{k \leq 2^\ell} |M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}|}_{\rightarrow 0 \text{ mit } \ell \rightarrow \infty \text{ (Stetigk.)}} \times \underbrace{\sum_{k=1}^{2^\ell} |M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}|}_{\leq V_t(M) \leq V_\infty(M) < \infty}\right] \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Gleichheitszeichen die  $\mathcal{L}^2$ -Orthogonalität der Martingalinkremente und in der letzten Zeile den Satz von der dominierten Konvergenz verwendet haben.

Somit  $\mathbb{E}[M_t^2] = 0$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{M_t = 0\}\right) = 1$ , Stetigkeit der Pfade liefert  $M_t \equiv 0$  f.s.  $\square$

**Satz 2.9.** Für  $X \in \mathcal{M}_2^c$  sei  $\|X\| := \|X\|_{\mathcal{M}_2^c} := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \wedge 1)$ .

$(\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|)$  ist ein vollständiger metrischer Raum (wenn man ununterscheidbare Prozesse identifiziert).

**Beobachtung 2.10.** I. Für  $X \in \mathcal{M}_2^c$  ist  $(X_t^2)$  ein Submartingal, insbesondere ist  $t \mapsto (\mathbb{E}[X_t^2])^{1/2}$  nicht-fallend.

2. Für  $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $\|X - Y\| = 0$  gilt  $\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ für alle } t \geq 0) = 1$ , d.h.  $X$  und  $Y$  sind ununterscheidbar (im Sinne von Def. 1.3):

$\|X - Y\| = 0$  impliziert  $\mathbb{E}[(X_n - Y_n)^2] = 0$ , woraus mit Doob's  $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung (Prop. 2.4) folgt, dass  $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq n} |X_u - Y_u|^2] = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

*Beweis von Satz 2.9.*  $\|\cdot\|$  ist eine (Pseudo-)Metrik auf  $\mathcal{M}_2^c$  (denn die  $\mathcal{L}^2$ -Norm erfüllt die Dreiecksungleichung).

Sei  $\{X^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}_2^c$  Cauchy-Folge, d.h.  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X^{(m)}\| = 0$ .

Insbesondere ist für jedes  $t \geq 0$   $\{X_t^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$  Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$

$\Rightarrow \exists X_t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$  mit  $X_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X_t$ .

Zeige:  $(X_t)$  ist Martingal. Für  $A \in \mathcal{A}, t \geq 0$  ist

$$\lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_A |X_t^{(n)} - X_t|] \leq \mathbb{P}(A)^{1/2} \left( \lim_n \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] \right)^{1/2} = 0$$

mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung, also gilt für  $0 \leq s < t, A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t - X_s)] = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t^{(n)} - X_s^{(n)})]}_{=0 \text{ (} X^{(n)} \text{ ist Martingal)}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_s^{(n)} - X_s)]}_{\rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty} - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t^{(n)} - X_t)]}_{\rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty} = 0.$$

Zeige:  $(X_t)$  hat (f.s.) stetige Pfade.

Sei  $T > 0$ . Zunächst stellen wir sicher, dass  $X$  eine Version mit rechtsstetigen Pfaden besitzt (um die Doob-Ungleichung anwenden zu können): setze für  $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$   $X_t := \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$  und dann für allgemeines  $t \in [0, T]$   $X_t := \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s$ , dies ist eine rechtsstetige Version von  $X$ , da die Filtration rechtsstetig ist.

Nun ist

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t|^2\right] \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \|X_T^{(n)} - X_T\|_{\mathcal{L}^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mit Doob-Ungleichung (Prop. 2.4), demnach gibt es eine Teilfolge  $n_k \nearrow \infty$  mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n_k)} - X_t| \geq \frac{1}{k}\right) < \infty.$$

Borel-Cantelli liefert  $X_t^{(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X_t$  gleichmäßig in  $t \leq T$  f.s., d.h.  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  hat stetige Pfade f.s. (und da dies für bel.  $T > 0$  gilt, folgt die Beh.)  $\square$

**Bemerkung 2.II.** Der Beweis von Satz 2.9 zeigt insbesondere:

$X, X^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$ , so gilt

$$\forall T > 0, \varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. die Pfade konvergieren lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.

**Vorbemerkung zur quadratischen Variation** Für die BB ist  $B_t^2 - t$  ein Martingal (Übung).

Sei  $(X_t)$  ein allgemeineres stetiges Martingal, was müssen wir von dem Submartingal  $(X_t^2)$  abziehen, damit es ein Martingal wird?

Im zeitdiskreten Fall gilt (vgl. [Kl, Satz 10.1 und Def. 10.3]):

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$   $\mathcal{L}^2$ -Martingal,  $A_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] (= \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}^2))$  ( $A_0 := 0$ ),  $(A_n)$  hat nicht-fallende Pfade, ist previsibel ( $A_n$  ist  $\mathcal{F}_{n-1}$ -m.b.) und  $(X_n^2 - A_n)$  ist Martingal.

Gesucht: ein Analogon im zeitkontinuierlichen Fall

**Satz 2.12.** Sei  $(M_t)_t \in \mathcal{M}_2^c$  (und der zugrundeliegende  $W$ -raum erfülle die üblichen Bedingungen, Def. 2.2). Dann gibt es einen adaptierten Prozess  $(A_t)_{t \geq 0}$  mit stetigen, nicht-fallenden Pfaden und  $A_0 = 0$ , so dass gilt

1.  $\mathbb{E}[A_t] < \infty$  für alle  $t \geq 0$  und
2.  $(M_t^2 - A_t)_{t \geq 0}$  ist ein Martingal.

$(A_t)$  ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit (d.h. falls  $(A'_t)$  ebenfalls obige Eigenschaften besitzt, so ist  $\mathbb{P}(A_t = A'_t \text{ für alle } t \geq 0) = 1$ ).

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 2.12 benötigen wir:

**Definition 2.13.** Ein linksstetiger stochastischer Prozess  $(H_t)_{t \geq 0}$  der Form

$$H_t = \sum_{k \geq 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t), \quad t \geq 0,$$

wo  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  eine (endliche oder abzählbare) Folge von Stoppzeiten ohne Häufungspunkt im Endlichen ist (d.h.  $\tau_k \nearrow \infty$  f.s., wenn es unendlich viele sind) und  $\xi_k$  eine beschränkte,  $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -messbare reelle ZV für  $k \in \mathbb{N}$ , heißt ein *elementarer Integrand* (auch: ein *einfacher previsibler Prozess*).

Für  $(H_t)$  dieser Form und einen (beliebigen) reellwertigen Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  definieren wir

$$\int_0^t H_s dX_s := \sum_{k \geq 1} \xi_k (X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}), \quad t \geq 0,$$

das *elementare stochastische Integral* (von  $H$  bezüglich  $X$ ). Man beachte: in der Summe sind f.s. nur endlich viele Summanden  $\neq 0$ .

Man schreibt auch  $(H \bullet X)_t := \int_0^t H dX := \int_0^t H_s dX_s$ .

**Bemerkung 2.14** (Linearität des elementaren Integrals).  $(H_t), (J_t)$  elementare Integranden,  $a, b \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $(aH_t + bJ_t)_{t \geq 0}$  ein elementarer Integrand und es gilt

$$\int_0^t (aH + bJ) dX = a \int_0^t H dX + b \int_0^t J dX.$$

Zum Beweis gehe zu einer gemeinsamen Verfeinerung der jeweils zugrundeliegenden Stoppfolgen über.

**Lemma 2.15.**  $(H_t)$  elementarer Integrand mit  $\sup_{t \geq 0} |H_t| \leq c$  f.s. für ein  $c \in \mathbb{R}_+$ ,  $(X_t) \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $X_0 = 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2] \quad \text{und} \quad \left(\int_0^t H dX\right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c. \quad (2.6)$$

*Beweis.*  $t \mapsto \int_0^t H dX$  ist stetig (n. Konstr.) ✓

Sei  $s < t, k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \mid \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}\right] \\ &= \xi_k\left(\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}] - \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_k} \mid \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}]\right) \quad (\xi_k \text{ ist } \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}\text{-m.b.}) \\ &= \xi_k\left(X_{t \wedge \tau_{k+1} \wedge (s \vee \tau_k)} - X_{t \wedge \tau_k \wedge (s \vee \tau_k)}\right) \quad (\text{Optional sampling, Satz 1.16}) \\ &= \xi_k\left(\underbrace{\mathbf{1}_{\{s < \tau_k\}}(X_{t \wedge \tau_k} - X_{t \wedge \tau_k})}_{=0} + \underbrace{\mathbf{1}_{\{s \geq \tau_k\}}(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k})}_{=(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k})}\right) = \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}), \end{aligned}$$

was  $\mathcal{F}_s$ -m.b. ist, somit

$$\mathbb{E}\left[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\dots \mid \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}] \mid \mathcal{F}_s\right] = \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}) \quad (2.7)$$

Betr. zunächst den Fall  $H_t = \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , d.h.  $H$  besitzt nur endlich viele Sprungstellen. Für  $s < t$  ist

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H dX \mid \mathcal{F}_s\right] = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \mid \mathcal{F}_s\right] \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{k=1}^m \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}) = \int_0^s H dX \quad \text{f.s.} \quad (2.8)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\xi_k^2(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k})^2\right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq m} \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \xi_\ell(X_{t \wedge \tau_{\ell+1}} - X_{t \wedge \tau_\ell})\right]}_{= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\dots \mid \mathcal{F}_{\tau_\ell}]] = \mathbb{E}\left[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \xi_\ell \underbrace{\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{\ell+1}} - X_{t \wedge \tau_\ell} \mid \mathcal{F}_{\tau_\ell}]}_{=0}\right]} \\ &\leq c^2 \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k})^2\right] \\ &= c^2 \mathbb{E}\left[(X_{t \wedge \tau_{m+1}} - X_{t \wedge \tau_1})^2\right] = c^2 \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{m+1}}^2] - c^2 \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_1}^2] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2], \end{aligned}$$

d.h. (2.6) gilt in diesem Fall (und die Schranke hängt nicht von  $m$  ab).

Im allg. Fall ist

$$H_t = \lim_{m \rightarrow \infty} H_t^{(m)} \quad \text{mit} \quad H_t^{(m)} := \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$$

und  $\int_0^t H dX = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t H^{(m)} dX$ ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^{(m)} dX\right)^2\right] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2],$$

wobei wir für das erste Ungleichungszeichen das Lemma von Fatou verwendet haben. Demnach ist für jedes  $T > 0$  die Familie von Martingalen  $(\int_0^t H^{(m)} dX)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  gleichmäßig  $\mathcal{L}^2$ -beschränkt, insbesondere gleichgradig integrierbar und somit ist ihr Limes ebenfalls ein Martingal.  $\square$

*Beweis von Satz 2.12.* Sei o.E.  $M_0 = 0$  (sonst gehe zu  $\tilde{M}_t := M_t - M_0$  über,  $\tilde{M}_t^2 - M_t^2 = -2M_t M_0 + M_0^2$  ist ebenfalls Martingal).

Definiere Stoppzeiten

$$\tau_1^{(n)} := 0, \quad \tau_{k+1}^{(n)} := \inf \left\{ t > \tau_k^{(n)} : |M_t - M_{\tau_k^{(n)}}| = 2^{-n} \right\}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

(beachte:  $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{\tau_k^{(n+1)}, k \in \mathbb{N}\}$  und für jedes  $n$  gilt  $\tau_k^{(n)} \nearrow_{k \rightarrow \infty} \infty$  f.s., da  $M$  stetige Pfade hat).

Setze

$$\begin{aligned} H_t^{(n)} &:= \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \mathbf{1}_{(\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}]}(t), \\ A_t^{(n)} &:= \sum_{k \geq 1} (M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}})^2, \\ I_t^{(n)} &:= \int_0^t H^{(n)} dM = \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} (M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}), \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} M_t^2 - \underbrace{M_0^2}_{=0} &= \sum_{k \geq 1} \left\{ 2(M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}^2) + (M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}}^2 - 2M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} + M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}^2) \right\} \\ &= 2I_t^{(n)} + A_t^{(n)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nach Konstr. ist  $\sup_{t \geq 0} |H_t^{(n)} - M_t| \leq 2^{-n}$ , also  $\sup_{t \geq 0} |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}| \leq 2^{-n} + 2^{-m} \Rightarrow$  (nach Lemma 2.15 [und Bem. 2.14])

$$\mathbb{E} \left[ (I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2 \right] \leq (2^{-n} + 2^{-m})^2 \mathbb{E} [M_t^2],$$

d.h.  $\{I^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$  ist Cauchy-Folge in  $\mathcal{M}_2^c$ . Mit Satz 2.9 folgt:

$$\exists I = (I_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c \quad \text{mit} \quad \|I^{(n)} - I\|_{\mathcal{M}_2^c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wähle (gemäß Bem. 2.11) eine Teilfolge  $n_j \nearrow \infty$  mit

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \leq j} |I_t^{(n_j)} - I_t| \geq \frac{1}{j} \right) \leq \frac{1}{j^2},$$

dann gilt (mit Borel-Cantelli) für jedes  $T > 0$

$$\sup_{t \leq T} |I_t^{(n_j)} - I_t| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.,}$$

demnach auch

$$A_t^{(n_j)} = M_t^2 - 2I_t^{(n_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A_t \quad \text{lokal gleichm\u00e4\u00dfig f.s.} \quad \text{und } (A_t) \text{ hat stetige Pfade}$$

Weiter ist  $A_0 = A_0^{(n_j)} = 0$  und nach Konstruktion gilt  $\sup_{s \leq t} (A_s^{(n)} - A_t^{(n)}) \leq 2(2 \cdot 2^{-n})^2$  f\u00fcr  $n \in \mathbb{N}$ , daher ist  $t \mapsto A_t$  nicht-fallend.

Schlie\u00dflich ist  $(M_t^2 - A_t)_t = (2I_t)_t \in \mathcal{M}_2^c$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $(A'_t)$  ein weiterer Prozess mit den geforderten Eigenschaften, dann ist

$$Y_t := A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t), \quad t \geq 0$$

ein stetiges Martingal mit Pfaden von endlicher Variation (nach Bem. 2.7, 4.), nach Satz 2.8 also  $Y_t \equiv 0$  f.s.  $\square$

**Definition 2.16.** F\u00fcr  $M \in \mathcal{M}_2^c$  hei\u00dft der Prozess  $(A_t)$  aus Satz 2.12 die *quadratische Variation* von  $M$ , er wird (meist) als  $\langle M \rangle$  geschrieben (d.h.  $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  ist ein Martingal). Man nennt  $\langle M \rangle$  auch den „Klammerprozess“ (engl.: bracket process) von  $M$ .

F\u00fcr  $M, N \in \mathcal{M}_2^c$  definieren wir

$$\langle M, N \rangle_t := \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t), \quad t \geq 0,$$

die *quadratische Kovariation* von  $M$  und  $N$ .

**Korollar 2.17.** Seien  $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ .  $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$  ist der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige adaptierte Prozess mit stetigen Pfaden von (lokal) endlicher Variation mit

1.  $\langle M, N \rangle_0 = 0$ ,
2.  $M_t N_t - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle_t, t \geq 0$  ist ein stetiges Martingal.

*Beweis.* 1.  $\checkmark$

Zu 2. beachte  $M_t N_t = \frac{1}{4} ((M_t + N_t)^2 - (M_t - N_t)^2)$ , Eindeutigkeit wie im Beweis von Satz 2.12: Sei  $(Z_t)$  ein weiterer Prozess mit den geforderten Eigenschaften, dann ist  $\langle M, N \rangle_t - Z_t = (M_t N_t - Z_t) - (M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)$  ein stetiges Martingal mit (lokal) endlicher Variation  $\Rightarrow \langle M, N \rangle_t - Z_t \equiv 0$  nach Satz 2.8.  $\square$

## 2.3 Stochastisches Integral

**Lemma 2.18.**  $H_t = \sum_{k \geq 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$  elementarer Integrand mit  $\sup_{t \geq 0} |H_t| \leq c \in [0, \infty)$  f.s.,  $M \in \mathcal{M}_2^c$ , dann ist  $H \bullet M = \left( \int_0^t H dM \right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$  und

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t H dM \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \right], \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

(wobei  $\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s$  realisierungsweise als Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert ist).

*Beweis.*  $H \bullet M \in \mathcal{M}_2^c$  hatten wir bereits in Lemma 2.15 bewiesen.

Zu (2.10): Betr. zunächst  $H_t = \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , d.h.  $H$  besitzt nur endlich viele Sprungstellen. Wie im Bew. von Lemma 2.15 ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dM\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\xi_k^2 (M_{t \wedge \tau_{k+1}} - M_{t \wedge \tau_k})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 (M_{t \wedge \tau_{k+1}} - M_{\tau_k})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 \underbrace{\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}}^2 - 2M_{t \wedge \tau_{k+1}} M_{\tau_k} + M_{\tau_k}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_k}\right]}_{= \mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_{k+1}}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_k}] - M_{\tau_k}^2}\right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_{t \wedge \tau_{k+1}} - \langle M \rangle_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_k}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m \xi_k^2 (\langle M \rangle_{t \wedge \tau_{k+1}} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau_k})\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right],
\end{aligned}$$

wobei wir in (\*) Satz 2.12 / Def. 2.16 verwendet haben.

Der Beweis funktioniert genauso, wenn wir annehmen, dass es für jedes  $T > 0$  ein deterministisches  $m = m(T)$  gibt mit  $\tau_m \geq T$  — was z.B. erfüllt ist, wenn wir a priori wissen, dass  $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \delta$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und ein festes  $\delta > 0$  gilt (und eine Durchsicht der Beweise von Lemma 2.21 und Korollar 2.22) zeigt, dass die Klasse der elementaren Integranden mit dieser (Zusatz-)eigenschaft für unsere Zwecke genügt).

Für den allgemeinen Fall approximieren wir (wie im Beweis von Lemma 2.15)  $H_t = \lim_{m \rightarrow \infty} H_t^{(m)}$  mit  $H_t^{(m)} := \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ .

Es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^{(m)})^2 d\langle M \rangle_s\right]$$

mit monotoner (oder auch mit dominierter) Konvergenz.

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^t H^{(m)} dM &\leq \sup_{0 \leq u \leq t, m \in \mathbb{N}} \int_0^u H^{(m)} dM = \sup_{0 \leq u \leq t, m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^m \xi_k (M_{u \wedge \tau_{k+1}} - M_{u \wedge \tau_k}) \\
&= \sup_{0 \leq u \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (M_{u \wedge \tau_{k+1}} - M_{u \wedge \tau_k}) = \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u H dM
\end{aligned}$$

und analog  $\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^t -H^{(m)} dM \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u -H dM$ , somit

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left| \int_0^t H^{(m)} dM \right|^2 \leq \left( \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u H dM + \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u -H dM \right)^2 \leq 4 \sup_{u \leq t} \left| \int_0^u H dM \right|^2,$$

nach Lemma 2.15 ist  $(\int_0^t H dM)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ , nach Doobs  $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung (Prop. 2.4, 2.) (und nochmals Lemma 2.15) gilt somit

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u H dM \right|^2\right] \leq 16 \mathbb{E}\left[\left| \int_0^t H dM \right|^2\right] \leq 16c^2 \mathbb{E}[M_t^2] < \infty,$$

demnach gilt mit dominierter Konvergenz:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dM\right)^2\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^{(m)} dM\right)^2\right].$$

□

**Definition 2.19.** Für progressiv messbares  $(Y_t)_{t \geq 0}$ ,  $T > 0$ ,  $M \in \mathcal{M}_2^c$  sei

$$\begin{aligned} \|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2 &:= \mathbb{E}\left[\int_0^T Y_u^2 d\langle M \rangle_u\right], \\ \mathcal{L}(M) &:= \{Y \text{ progressiv messbar} : \|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2 < \infty \text{ für alle } T > 0\}. \end{aligned}$$

**Bem.** Sei  $\mu_M$  auf  $\Omega \times [0, \infty)$  definiert durch  $\mu_M(A) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(\omega, t) d\langle M \rangle_t\right]$ , so ist  $\|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2$  die  $\mathcal{L}^2$ -Norm von  $(Y_t(\omega))_{0 \leq t \leq T}$  bezüglich  $\mu_M$ .

**Beobachtung 2.20.**  $Y$  progressiv messbar und beschränkt  $\Rightarrow Y \in \mathcal{L}(M)$ , insbesondere liegen beschränkte elementare Integranden in  $\mathcal{L}(M)$  für jedes  $M \in \mathcal{M}_2^c$ .

*Beweis.* (Offensichtlich) □

Idee: Wir verwenden Lemma 2.21 und „ $\mathcal{L}^2$ -Isometrie“, um das (elementare) stochastische Integral (vgl. Def. 2.13) von den elementaren Integranden auf  $\mathcal{L}(M)$  fortzusetzen.

**Lemma 2.21.** Sei  $(A_t)_{t \geq 0}$  adaptierter Prozess mit stetigen, nicht-fallenden Pfaden,  $A_0 = 0$  und  $\mathbb{E}[A_t] < \infty$  für alle  $t \geq 0$ . Zu jedem progressiv messbaren Prozess  $Y$  mit  $\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_u^2 dA_u\right] < \infty$  für alle  $T > 0$  gibt es eine Folge  $H^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  von beschränkten elementaren Integranden mit

$$\sup_{T > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s^{(n)} - Y_s|^2 dA_s\right] = 0. \quad (2.11)$$

*Beweis.* 1) Sei  $Y$  beschränkt mit stetigen Pfaden,  $T > 0$ .

Setze  $H_t^{(n)} := \sum_{k=0}^{\infty} Y_{k/2^n} \mathbf{1}_{(k/2^n, (k+1)/2^n]}(t)$  (dies ist ein beschr. elementarer Integrand), es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s^{(n)} - Y_s|^2 dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.12)$$

(dominierte Konvergenz, denn  $H_s^{(n)} - Y_s \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  für jedes  $s \geq 0$  und  $|H_s^{(n)} - Y_s| \leq 2\|Y\|_\infty$ ).

2) Sei  $Y$  beschränkt (aber nicht notw. stetig; wir verwenden ggfs. eine geeign. Glättung von  $Y$  und approximieren dann diese).

Sei zunächst  $T > 0$  fest, wir nehmen o.E. an

$$t \mapsto A_t \text{ ist strikt wachsend und bijektiv mit } A_t - A_s \geq t - s \quad (2.13)$$

(sonst gehe über zu  $\tilde{A}_t := A_t + t$ ) und

$$Y_0 = 0, \quad Y_t = 0 \text{ für } t > T.$$

Sei  $\tau_u := \inf\{t \geq 0 : A_t > u\}$ ,  $u \geq 0$  die Inverse von  $(A_t)_t$ , es ist

$$\int_0^\infty f(t) dA_t = \int_0^\infty f(\tau_u) du \quad \text{für } f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ m.b.} \quad (2.14)$$

(denn für  $f = \mathbf{1}_{(a,b]}$  ist die linke S. =  $A_b - A_a$ , die rechte S. =  $\lambda(\{u : a < \tau_u \leq b\}) = A_b - A_a$ , dann approximiere allg. nicht-neg. messbares  $f$  mittels Linearkombinationen solcher Stufenfunktionen, etc.)

Für  $m \in \mathbb{N}$  sei

$$G_t^{(m)} := m \int_{\tau_{A_t - 1/m}}^t Y_s dA_s, \quad t \geq 0$$

(dies ist eine "geglättete" Version von  $Y$ ), es ist

$$|G_t^{(m)}| \leq m \|Y\|_\infty (A_t - A_{\tau_{A_t - 1/m}}) = m \|Y\|_\infty (A_t - (A_t - \frac{1}{m})) = \|Y\|_\infty,$$

d.h.  $G^{(m)}$  ist beschränkt,  $t \mapsto G_t^{(m)}$  ist stetig.

Zeige:  $G^{(m)}$  ist adaptiert:

$$\tau_{A_t - 1/m} = \inf\{u \geq 0 : A_u > A_t - \frac{1}{m}\} \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-m.b.,}$$

$(\int_0^t Y_s dA_s)_{t \geq 0}$  ist adaptiert.

Für  $s \geq 0$  ist

$$\begin{aligned} G_{\tau_s}^{(m)} &= m \int_{\tau_{A_{\tau_s} - 1/m}}^{\tau_s} Y_u dA_u = m \int_0^\infty \mathbf{1}(\tau_{s-1/m} < u \leq \tau_s) Y_u dA_u \\ &\stackrel{(2.14)}{=} m \int_0^\infty \mathbf{1}(\tau_{s-1/m} < \tau_u \leq \tau_s) Y_{\tau_u} du = m \int_{(s-1/m)^+}^s Y_{\tau_u} du \end{aligned}$$

demnach gilt (realisierungsweise)  $G_{\tau_s}^{(m)} \rightarrow Y_{\tau_s}$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$  für  $m \rightarrow \infty$  und

$$\int_0^\infty (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s = \int_0^\infty (G_{\tau_s}^{(m)} - Y_{\tau_s})^2 ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

somit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

(verwende dominierte Konvergenz).

Nach 1) gibt es beschr. elementare Integranden  $H^{(m,\ell)}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m,\ell)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

wähle  $\ell_m \nearrow \infty$ , so dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m,\ell_m)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] = 0$ , so leistet die Folge von elementaren Integranden  $H^{(m)} := H^{(m,\ell_m)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} 2\mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] + \lim_{m \rightarrow \infty} 2\mathbb{E}\left[\int_0^T (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] = 0 \end{aligned}$$

(d.h. die Formel (2.12) gilt für dieses  $Y$  und diesen Zeithorizont  $T$ ).

3) Zeige: Lemma 2.21 gilt für beschr., progr. m.b.  $Y$ . Nach 2) gibt es zu  $n \in \mathbb{N}$  einen beschränkten, elementaren Integranden  $H^{(n)}$  mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (H_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] \leq \frac{1}{n},$$

die Folge  $H^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  leistet das Gewünschte: (2.11) gilt.

4) Sei  $Y$  unbeschränkt, setze  $Y_t^{(n)} := Y_t \mathbf{1}_{\{|Y_t| \leq n\}}$ , es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^n Y_s^2 \mathbf{1}_{\{|Y_s| \leq n\}} dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(dominierte Konvergenz). Approximiere  $Y^{(n)}$  mit  $H^{(n)}$  wie in 3), so dass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \leq \frac{1}{n},$$

dann gilt auch

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(d.h. die Existenz einer approximierenden Folge von beschränkten elementaren Integranden, die (2.11) erfüllen, gilt allgemein).  $\square$

**Korollar 2.22.** Für  $M \in \mathcal{M}_2^c$  definiert

$$\|Y\|_{\mathcal{L}(M)} := \sum_{T \in \mathbb{N}} 2^{-T} (\|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)} \wedge 1)$$

eine Metrik auf  $\mathcal{L}(M)$ , bezüglich der

$$\mathcal{L}_0 := \{H : H \text{ beschr. elementarer Integrand}\}$$

dicht liegt.

*Beweis.* Verwende Lemma 2.21 mit  $A_t = \langle M \rangle_t$ .  $\square$

**Beobachtung 2.23.**

$$(\mathcal{L}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(M)}) \ni H \mapsto H \bullet M \in (\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_2^c})$$

ist eine Isometrie (mit  $(\mathcal{L}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(M)})$  aus Kor. 2.22,  $H \bullet M$  aus Def. 2.13,  $(\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_2^c})$  aus Satz 2.9), insbesondere gilt

$$(H^{(n)})_n \subset \mathcal{L}_0 \text{ Cauchy-Folge} \quad \Rightarrow \quad (H^{(n)} \bullet M)_n \subset \mathcal{M}_2^c \text{ Cauchy-Folge.}$$

*Beweis.* Für jedes  $T > 0$  ist  $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H dM\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] = \|H\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2$  nach Lemma 2.18.  $\square$

**Satz 2.24.** Sei  $M \in \mathcal{M}_2^c$ . Für  $X \in \mathcal{L}(M)$  gibt es einen (bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutigen) Prozess  $X \bullet M \in \mathcal{M}_2^c$  mit der Eigenschaft

$$\forall \{H^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_0 \text{ mit } \|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 : \|H^{(n)} \bullet M - X \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$X \bullet M$  heißt das stochastische Integral von  $X$  bezüglich  $M$ , man schreibt auch  $(X \bullet M)_t = \int_0^t X dM = \int_0^t X_s dM_s$ .

*Beweis.* Kor. 2.22 zeigt, dass es mindestens eine  $X$  approximierende Folge von elementaren Integranden  $H^{(n)}$  gibt, die demnach eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}(M)$  ist. Wegen Beob. 2.23 und Vollständigkeit von  $\mathcal{M}_2^c$  konvergiert  $H^{(n)} \bullet M$  in  $\mathcal{M}_2^c$  (und wir nennen ihren Grenzwert  $X \bullet M$ ).

Zur Wohldefiniertheit: Sei  $\tilde{H}^{(n)} \in \mathcal{L}_0, n \in \mathbb{N}$  eine weitere Folge mit  $\|\tilde{H}^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$ , so gilt  $\|H^{(n)} - \tilde{H}^{(n)}\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$ , also auch  $\|H^{(n)} \bullet M - \tilde{H}^{(n)} \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} = \|(H^{(n)} - \tilde{H}^{(n)}) \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$ .  $\square$

**Proposition 2.25** (Eigenschaften des stochastischen Integrals). Für  $M \in \mathcal{M}_2^c, X, Y \in \mathcal{L}(M)$  gilt

1.  $\int_0^0 X dM = 0$

2. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist

$$\int_0^t aX_s + bY_s dM_s = a \int_0^t X_s dM_s + b \int_0^t Y_s dM_s, t \geq 0$$

3. Mit  $\int_s^t X dM := \int_0^t X dM - \int_0^s X dM$  gilt für  $s \leq t$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X dM\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

4.  $\left\langle \int_0^t X dM \right\rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$

5.  $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X dM\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u\right]$

*Beweis.* 1., 2.  $\checkmark$  (Entspr. gilt für Approximanten  $H \in \mathcal{L}_0$ , Übung)

3. Sei  $H^{(n)} \in \mathcal{L}_0$  mit  $\|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$ , dann gilt insbes.  $\int_0^t H^{(n)} dM \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \int_0^t X dM$  für jedes  $t \geq 0$ .

Sei  $s < t, A \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{1}_A \left(\int_s^t X dM\right)^2\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\mathbf{1}_A \left(\int_s^t H^{(n)} dM\right)^2\right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\mathbf{1}_A \int_s^t (H_u^{(n)})^2 d\langle M \rangle_u\right] = E\left[\mathbf{1}_A \int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u\right] \end{aligned}$$

denn  $\|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$  n. Vor.

4. Sei  $s < t$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X dM\right)^2 - \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X dM\right)^2 - \int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right]}_{=0 \text{ nach 3.}} - 2 \int_0^s X dM \times \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_s^t X dM \middle| \mathcal{F}_s\right]}_{=0, \int_0^s X dM \text{ ist Martingal}} \\ &\quad + \left(\int_0^s X dM\right)^2 - \int_0^s X_u^2 d\langle M \rangle_u, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left( \int_0^t X dM \right)^2 - \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \Big|_{t \geq 0} \text{ ist Martingal}$$

(und die weiteren in Satz 2.12 / Def. 2.16 geforderten Eigenschaften (adaptiert, stetige, nicht-fallend Pfade, Start in 0) sind offensichtlich erfüllt).

5. ✓ (Z.B. nehme Erwartungswert in 3.) □

Wie die folgende Proposition zeigt, ist „pfadweises“ Denken ist wenigstens entlang Stoppzeiten erlaubt:

**Proposition 2.26.**  $M \in \mathcal{M}_2^c$ ,  $X \in \mathcal{L}(M)$ ,  $T$  ( $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -)Stoppzeit, dann gilt f.s.

$$\int_0^{t \wedge T} X dM = (X \bullet M)_{t \wedge T} = ((X \mathbf{1}_{[0, T]}) \bullet M)_t = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0, T]}(s) dM_s \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(Das erste und das dritte Gleichheitszeichen sind (nur) notationelle Identitäten, das zweite Gleichheitszeichen ist die eigentliche Aussage.)

**Beobachtung 2.27.** Für  $N \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $N_0 = 0$ ,  $t \geq 0$  gilt

$$\langle N \rangle_t = 0 \text{ f.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(N_s = 0 \text{ für alle } s \leq t) = 1.$$

*Beweis.* Für  $s \leq t$  ist auch  $\langle N \rangle_s = 0$  f.s. ( $\langle N \rangle$  hat nicht-fallende Pfade), also  $\mathbb{E}[N_s^2] = \mathbb{E}[N_0^2] + \mathbb{E}[\langle N \rangle_s] = 0$ , d.h.  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{s \leq t, s \in \mathbb{Q}_+} \{N_s = 0\}\right) = 1$ , Beh. folgt mit Pfadstetigkeit. □

*Beweis von Prop. 2.26.* Setze  $\tilde{X}_t := X_t \mathbf{1}_{[0, T]}(t)$ , es ist  $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$  und

$$(X \bullet M)_{t \wedge T} - (\tilde{X} \bullet M)_t = ((X - \tilde{X}) \bullet M)_{t \wedge T} - ((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T}) \quad (2.15)$$

(Linearität des stoch. Integrals, Prop. 2.25, 2.)

Für bel. (beschränkte) Stoppzeiten  $S \leq T$ ,  $Y \in \mathcal{L}(M)$  gilt

$$\mathbb{E}\left[\left((Y \bullet M)_{t \wedge T} - (Y \bullet M)_{t \wedge S}\right)^2 \Big| \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge S}^{t \wedge T} Y_u^2 d\langle M \rangle_u \Big| \mathcal{F}_S\right] \quad (2.16)$$

$((Y \bullet M)_t^2 - \int_0^t Y_u^2 d\langle M \rangle_u)$  ist ein Martingal gem. Prop. 2.25, 4, wende darauf den Satz vom optionalen Stoppen an).

Für (festes)  $s \leq t$  ist

$$\mathbb{E}\left[\left(\left((X - \tilde{X}) \bullet M\right)_{t \wedge T} - \left((X - \tilde{X}) \bullet M\right)_{s \wedge T}\right)^2 \Big| \mathcal{F}_{s \wedge T}\right] \stackrel{(2.16)}{=} \mathbb{E}\left[\int_{s \wedge T}^{t \wedge T} \underbrace{(X_u - \tilde{X}_u)^2}_{=0 \text{ da } u \leq T} d\langle M \rangle_u \Big| \mathcal{F}_{s \wedge T}\right] = 0,$$

d.h.  $((X - \tilde{X}) \bullet M)_{\cdot \wedge T} \in \mathcal{M}_2^c$  mit quadrat. Var.  $\equiv 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left((X - \tilde{X}) \bullet M\right)_{t \wedge T} = 0 \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1 \quad (\text{mit Beob. 2.27}).$$

Weiter ist

$$\mathbb{E}\left[\left((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge T}^t \tilde{X}_u^2 d\langle M \rangle_u\right] = 0 \quad (\text{denn } \tilde{X}_u = 0 \text{ für } u > T)$$

wobei wir für das erste Gleichheitszeichen (2.16) mit Ersetzungen  $S \leftarrow t \wedge T, T \leftarrow t$  verwendet haben, also (zusammen mit Stetigkeit der Pfade)

$$\mathbb{P}\left(\left((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T} = 0 \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1.\right.$$

Insgesamt: Beide Terme auf der rechten Seite von (2.15) sind  $\equiv 0$  bis auf Ununterscheidbarkeit.  $\square$

**Korollar 2.28.**  $M \in \mathcal{M}_2^c, X, Y \in \mathcal{L}(M), T$  Stoppzeit mit  $X \mathbf{1}_{[0, T]} = Y \mathbf{1}_{[0, T]}$  (d.h.  $X$  und  $Y$  stimmen auf  $[0, T]$  überein), dann gilt f.s.

$$\int_0^t X dM = \int_0^t Y dM \quad \text{für alle } t \leq T.$$

*Beweis.* F.s. gilt

$$\int_0^{t \wedge T} X dM \stackrel{(*)}{=} \int_0^t X \mathbf{1}_{[0, T]} dM = \int_0^t Y \mathbf{1}_{[0, T]} dM \stackrel{(*)}{=} \int_0^{t \wedge T} Y dM \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

wobei wir für  $(*)$  jeweils Prop. 2.26 verwendet haben.  $\square$

Seien  $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ , wir schreiben

$$|\langle M, N \rangle|_t := V_t(\langle M, N \rangle) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k = t} \sum_{i=1}^k |\langle M, N \rangle_{t_i} - \langle M, N \rangle_{t_{i-1}}| \quad (2.17)$$

für die Totalvariation von  $\langle M, N \rangle$  (als Prozess in  $t \geq 0$ ).

**Satz 2.29** (Kunita-Watanabe-Ungleichung<sup>1</sup>). Seien  $M, N \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}(M), Y \in \mathcal{L}(N)$ , dann gilt f.s.

$$\int_0^t |X_s Y_s| d|\langle M, N \rangle|_s \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s\right)^{1/2} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

*Beweis.* F.s. gilt

$$\forall t \geq 0, \lambda \in \mathbb{Q} : \langle M + \lambda N \rangle_t = \langle M \rangle_t + 2\lambda \langle M, N \rangle_t + \lambda^2 \langle N \rangle_t,$$

insbes. gilt f.s. (mit Notation  $\langle \cdot \rangle_s^t := \langle \cdot \rangle_t - \langle \cdot \rangle_s$ )

$$\forall 0 \leq s \leq t, \lambda \in \mathbb{Q} : \langle M \rangle_s^t + 2\lambda \langle M, N \rangle_s^t + \lambda^2 \langle N \rangle_s^t \geq 0 \quad (2.18)$$

und somit auch f.s.

$$\forall 0 \leq s \leq t : |\langle M, N \rangle_s^t| \leq \left(\langle M \rangle_s^t\right)^{1/2} \left(\langle N \rangle_s^t\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \langle M \rangle_s^t + \frac{1}{2} \langle N \rangle_s^t \quad (2.19)$$

<sup>1</sup>Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.* 30, 209–245, (1967)

(für die erste Ungl. verwende (2.18) und die Beob., dass  $ax^2+bx+c$  die Lösungen  $-\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{D}$  mit  $D := b^2-4ac$  („Diskriminante“) besitzt, wenn  $a > 0$  so muss  $D \leq 0$  sein, damit  $\inf_{x \in \mathbb{Q}} \{ax^2 + bx + c\} \geq 0$  gilt; für die zweite Ungl. verwende  $2ab \leq a^2 + b^2$ .)

Demnach gibt es  $\Omega_0 \subset \Omega$  mit  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  so dass für  $\omega \in \Omega_0$  gilt

$$\int \mathbf{1}_A(s) d\langle M, N \rangle_s \leq \frac{1}{2} \int \mathbf{1}_A(s) d\langle M \rangle_s + \frac{1}{2} \int \mathbf{1}_A(s) d\langle N \rangle_s =: \nu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

d.h. als Maße auf  $\mathbb{R}_+$  aufgefasst sind  $d\langle M, N \rangle$  (und offensichtlich auch  $d\langle M \rangle, d\langle N \rangle$ ) absolut stetig bezgl.  $d\nu$ .

Nach Satz von Radon-Nikodým ([Kl, Kor. 7.34]) gibt es (für  $\omega \in \Omega_0$ ) Dichten  $f_u^M, f_u^N, f_u^{M,N}$ ,  $u \geq 0$  so dass

$$\forall 0 \leq s \leq t : \langle M \rangle_s^t = \int_s^t f_u^M \nu(du), \quad \langle N \rangle_s^t = \int_s^t f_u^N \nu(du), \quad \langle M, N \rangle_s^t = \int_s^t f_u^{M,N} \nu(du).$$

Wegen (2.18) gilt für  $\nu$ -f.a.  $s \geq 0$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : f_s^M + 2\lambda f_s^{M,N} + \lambda^2 f_s^N \geq 0 \quad (2.20)$$

(zunächst für  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , da die linke S. als Funktion von  $\lambda$  stetig ist, gilt die Aussage auch für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .)

Wähle  $\lambda_s (= \lambda_s(\omega)) := \gamma |Y_s| |X_s|^{-1} \mathbf{1}_{\{X_s \neq 0\}}$  (mit  $\gamma \in \mathbb{R}$ ), also gilt f.s. (multipliziere (2.20) mit  $X_s^2$ )

$$X_s^2 f_s^M + 2\gamma |X_s| |Y_s| f_s^{M,N} + \gamma^2 Y_s^2 f_s^N \geq 0 \quad \text{für } \nu\text{-f.a. } s \geq 0 \text{ und alle } \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

(zunächst wieder für alle  $\gamma \in \mathbb{Q}$ , dann Stetigkeitsargument) und (2.21) bleibt richtig, wenn man  $f_s^{M,N}$  durch  $|f_s^{M,N}|$  ersetzt ((2.21) gilt für  $\gamma$  und für  $-\gamma$ ).

Integriere (2.21) mit  $\nu$  über  $(0, t]$ :

$$\mathbb{P}\text{-f.s. gilt : } \forall \gamma \in \mathbb{R} : \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s + 2\gamma \int_0^t |X_s Y_s| d\langle M, N \rangle_s + \gamma^2 \int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \geq 0,$$

ein „Diskriminantenargument“ wie oben liefert Beh. □

**Satz 2.30** (Martingalcharakterisierung des stoch. Integrals (im  $\mathcal{L}^2$ -Fall)). *Sei  $M \in \mathcal{M}_2^c$ ,  $X \in \mathcal{L}(M)$ . Das stochastische Integral  $X \bullet M$  ist das (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige Martingal  $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $\Phi_0 = 0$  und*

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{f.s.}$$

für jedes  $N \in \mathcal{M}_2^c$ .

*Beweis.* Für  $H, K \in \mathcal{L}_0$ ,  $M, N \in \mathcal{M}_2^c$  gilt f.s.

$$\langle H \bullet M, K \bullet N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s, \quad t \geq 0. \quad (2.22)$$

(Übung: Dazu genügt es nach Kor. 2.17 zu zeigen, dass

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t H dM \right) \left( \int_s^t K dN \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t H_u K_u d\langle M, N \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

f.s. für  $s \leq t$  gilt.)

Seien  $X, M, N$  wie in den Vor., zeige:  $\Phi_t := \int_0^t X dM$  erfüllt die Behauptung.

Wähle  $\mathcal{L}_0 \ni X^{(n)}, n \in \mathbb{N}$  mit  $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (gemäß Kor. 2.22).

Fixiere  $T > 0$ , wähle Teilfolge  $\tilde{X}^{(k)} = X^{(n_k)}$  mit  $\int_0^T |\tilde{X}_u^{(k)} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  f.s. (wegen  $\mathbb{E}[\int_0^T |X_u^{(n)} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ist dies mit Borel-Cantelli möglich).

Für  $M, N \in \mathcal{M}_2^c$  gilt

$$(\langle M, N \rangle_t)^2 \leq (|\langle M, N \rangle_t|)^2 \leq \langle M \rangle_t \langle N \rangle_t$$

(verwende Satz 2.29 mit  $X = Y \equiv 1$ ), also für  $t \leq T$

$$\begin{aligned} |\langle \int_0^t \tilde{X}^{(k)} dM - \int_0^t X dM, N \rangle_t|^2 &\leq \langle \int_0^t \tilde{X}^{(k)} - X dM \rangle_t \langle N \rangle_t \\ &= \int_0^t (\tilde{X}_u^{(k)} - X_u)^2 d\langle M \rangle_u \times \langle N \rangle_t \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mit (2.22) für  $H = \tilde{X}^{(k)}, Y = 1$ :

$$\begin{aligned} \langle \int_0^t \tilde{X}^{(k)} dM, N \rangle_t &= \int_0^t \tilde{X}_s^{(k)} d\langle M, N \rangle_s \\ &= \int_0^t X_s d\langle M, N \rangle_s + \int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s) d\langle M, N \rangle_s \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Die linke Seite konvergiert n. obigem für  $k \rightarrow \infty$  f.s. gegen  $\langle \int_0^t X dM, N \rangle_t$ , wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s) d\langle M, N \rangle_s \right| &\leq \int_0^t |\tilde{X}_s^{(k)} - X_s| d|\langle M, N \rangle_s| \\ &\leq \left( \int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s)^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} (\langle N \rangle_t)^{1/2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(verwende Satz 2.29 für die zweite Ungleichung) konvergiert die rechte S. gegen  $\int_0^t X_s d\langle M, N \rangle_s$ . Da  $T > 0$  beliebig gewählt werden kann, folgt die Beh.

Zur Eindeutigkeit: Habe  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{M}_2^c$  ebenfalls die geforderten Eigenschaften, dann ist

$$\langle \tilde{\Phi} - \int_0^t X dM, N \rangle_t \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

für jedes  $N \in \mathcal{M}_2^c$ , insbesondere mit  $N_t := \tilde{\Phi}_t - \int_0^t X dM$  ist

$$\langle \tilde{\Phi} - \int_0^t X dM \rangle_t \equiv 0 \quad \text{f.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}_t - \int_0^t X dM \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

mit Beob. 2.27. □

**Korollar 2.31.** Seien  $M, \tilde{M} \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}(M), \tilde{X} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ . Es gilt

$$1. \quad \langle \int_0^t X dM, \int_0^t \tilde{X} d\tilde{M} \rangle_t = \int_0^t X_s \tilde{X}_s d\langle M, \tilde{M} \rangle_s \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ f.s.}$$

2. Sei  $T$  eine Stoppzeit mit  $X_{t \wedge T} = \tilde{X}_{t \wedge T}, M_{t \wedge T} = \tilde{M}_{t \wedge T}$  für alle  $t \geq 0$  f.s., so gilt f.s.

$$\int_0^{t \wedge T} X dM = \int_0^{t \wedge T} \tilde{X} d\tilde{M}, \quad t \geq 0.$$

**Bem.** Aussage 2. verstärkt Kor. 2.28 – dort wurde nur der Integrand “geändert”, nicht auch das  $M$ .

*Beweis.* 1. Mit Satz 2.30 ist

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot X dM, \widetilde{M} \right\rangle_t &= \int_0^t X_s d\langle M, \widetilde{M} \rangle_s, \\ \left\langle \int_0^\cdot X dM, \int_0^\cdot \widetilde{X} d\widetilde{M} \right\rangle_t &= \int_0^t \widetilde{X}_s d\langle \widetilde{M}, \int_0^\cdot X dM \rangle_s = \int_0^t X_s \widetilde{X}_s d\langle M, \widetilde{M} \rangle_s. \end{aligned}$$

2. Für  $N \in \mathcal{M}_2^c$  ist

$$\langle M - \widetilde{M}, N \rangle_{t \wedge T} \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

(für eine Stoppzeit  $\tau$  ist stets  $\langle M_{\cdot \wedge \tau} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$ , denn  $M_{t \wedge \tau}^2 - \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$  ist ein Martingal [verwende optional stopping]).

$$\begin{aligned} &\left\langle \int_0^\cdot X dM - \int_0^\cdot \widetilde{X} d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} \stackrel{\text{Kor. 2.28}}{=} \left\langle \int_0^\cdot X dM - \int_0^\cdot X d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} \\ &= \left\langle \int_0^\cdot X dM, N \right\rangle_{t \wedge T} - \left\langle \int_0^\cdot X d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} = \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle M, N \rangle_r - \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle \widetilde{M}, N \rangle_r \\ &= \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle M - \widetilde{M}, N \rangle_r = 0. \end{aligned}$$

Insbes. gilt für  $N_t := \int_0^{t \wedge T} X dM - \int_0^{t \wedge T} \widetilde{X} d\widetilde{M} : (N_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$  mit  $\langle N \rangle_t \equiv 0 \Rightarrow N_t \equiv 0$  (f.s.) gem. Beob. 2.27.  $\square$

## 2.4 Semimartingale, etc.

**Vorbemerkung** Die bisher entwickelte, auf  $\mathcal{L}^2$ -Argumente fußende Integrationstheorie enthält noch „lästige“ Integrierbarkeitsvoraussetzungen für die zulässigen Integranden und Integratoren.

Betrachte folgendes Bsp.:  $M_t = B_t$  Standard-BB, (somit  $\langle M \rangle_t = t$ ),  $Y_t = e^{\alpha B_t^2} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^t Y_s^2 d\langle M \rangle_s \right] &= \int_0^{t \wedge 1} \mathbb{E} \left[ e^{2\alpha B_s^2} \right] ds = \int_0^{t \wedge 1} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{2\alpha x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/(2s)}}_{=(2\pi s)^{-1/2} \exp\left((2\alpha - 1/(2s))x^2\right)} dx ds \\ &= \begin{cases} +\infty, & \alpha(t \wedge 1) > \frac{1}{4}, \\ < \infty, & \alpha(t \wedge 1) < \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere:  $\int_0^t e^{B_s^2/5} dB_s$  ist ein (von der bisher betrachteten Theorie erfasster) wohldefinierter stochastischer Prozess, aber  $\int_0^t e^{B_s^2/3} dB_s = ??$  existiert (bisher) nicht.

Wir beheben diese(s) Problem(e) durch „Lokalisierung“ mittels geeigneter Stoppfolgen.

Im Folgenden erfülle der zugrundeliegende W’raum stets die üblichen Bedingungen, vgl. Def. 2.2.

**Definition 2.32.** Ein stetiger adaptierter Prozess  $(M_t)_{t \geq 0}$  heißt ein (stetiges) *lokales Martingal*, wenn es eine Folge von Stoppzeiten  $T_1 \leq T_2 \leq \dots$  mit  $T_n \rightarrow \infty$  f.s. gibt, so dass  $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt (eine) *lokalisierende Stopp(zeiten)folge* (auch: eine *reduzierende Stoppfolge*).

Wir schreiben

$$\mathcal{M}_{loc}^c := \{M : M \text{ stetiges lokales Martingal}\}.$$

**Bemerkung 2.33.** Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit lokalisierender Stoppfolge  $(T_n)$  und  $M_0 = 0$ . Wir können stets annehmen, dass  $T_n$  und  $M^{T_n} := (M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$  beschränkt sind.

*Beweis.*  $\tilde{T}_n := T_n \wedge n$  ist ebenfalls lokalisierende Stoppfolge.

$S_m := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq m\}$  ist Stoppzeit, es gilt  $S_m \nearrow \infty$  (Stetigkeit der Pfade) und  $|M_{t \wedge S_m}| \leq m$ .

Zeige:  $(M_{t \wedge S_m})_{t \geq 0}$  ist Martingal. Sei  $0 \leq s \leq t$ ,  $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge S_m} \mathbf{1}_A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge S_m \wedge T_n} \mathbf{1}_A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_{s \wedge S_m \wedge T_n} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_{s \wedge S_m} \mathbf{1}_A],$$

wobei wir für das erste und das dritte Gleichheitszeichen dominierte Konvergenz und für das zweite Gleichheitszeichen optional sampling (für  $(M_{\cdot \wedge T_n}) \in \mathcal{M}_2^c$ ) verwendet haben.  $\square$

**Bemerkung 2.34.**  $\mathcal{M}_2^c \subset \mathcal{M}_{loc}^c$  (und generell  $M$  stetiges Martingal mit  $M_0 = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ ). Im Allgemeinen braucht ein lokales Martingal allerdings kein Martingal zu sein.

Für ein einfaches Beispiel betrachte  $(B_t)_{t \geq 0}$  Standard-Brownsche Bewegung,  $Z$  eine davon unabhängige,  $\mathcal{F}_0$ -messbare reelle ZV mit  $\mathbb{E}[|Z|] = \infty$ . Dann ist  $M_t := Z B_t$ ,  $t \geq 0$  ein lokales Martingal, wegen  $\mathbb{E}[|M_t|] = \infty$  für  $t > 0$  aber kein („echtes“) Martingal.

**Lemma 2.35** („lokale Version“ von Satz 2.8). Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit f.s. endlicher Totalvariation auf  $[0, t]$  für alle  $t > 0$  und  $M_0 = 0$ . Dann gilt  $M_t \equiv 0$  f.s.

*Beweis.* Sei  $(T_n)_n$  lokalisierende Stoppfolge.  $(M_{t \wedge T_n})_t$  ist stetiges Martingal mit endlicher Totalvariation  $\Rightarrow M_{t \wedge T_n} \equiv 0$  nach Satz 2.8. Wegen  $T_n \rightarrow \infty$  f.s. gilt also  $M_t \equiv 0$  f.s.  $\square$

**Satz und Definition 2.36** („lokale Version“ von Satz 2.12 / Def. 2.16 / Kor. 2.17). Zu  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  gibt es einen (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutigen adaptierten Prozess  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  mit stetigen, nicht-fallenden Pfaden,  $\langle M \rangle_0 = 0$  und

$$(M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^c.$$

$\langle M \rangle$  heißt die quadratische Variation von  $M$ .

Für jede Stoppzeit  $T$ ,  $M^T := (M_{t \wedge T})_{t \geq 0}$  gilt  $\langle M^T \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge T}$  ( $=: \langle M \rangle_t^T$ ).

Für  $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^c$  ist

$$\langle M, N \rangle_t := \frac{1}{4} \langle M + N \rangle_t - \frac{1}{4} \langle M - N \rangle_t$$

(die quadratische Kovariation von  $M$  und  $N$ ) der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige adaptierte Prozess mit stetigen Pfaden von (lokal) endlicher Totalvariation mit  $\langle M, N \rangle_0 = 0$  und

$$(M_t N_t - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^c.$$

*Beweis.* Eindeutigkeit bis auf Ununterscheidbarkeit folgt mit Lemma 2.35, analog zum Beweis von Satz 2.12.

Sei  $(T_n)_n$  lokalisierende Stoppfolge für  $M$ . Für  $m \geq n$  ist

$$(M_{t \wedge T_n}^{T_m})^2 - \langle M^{T_m} \rangle_{t \wedge T_n} = M_{t \wedge T_n}^2 - \langle M^{T_m} \rangle_{t \wedge T_n}, \quad t \geq 0$$

ein Martingal (optional stopping) und ebenso  $(M_{t \wedge T_n}^2 - \langle M^{T_n} \rangle_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$  (setze oben  $m = n$ ). Somit ist  $(\langle M^{T_m} \rangle_{t \wedge T_n} - \langle M^{T_n} \rangle_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$  ein Martingal, besitzt n. Konst. Pfade von (lokal) endlicher Variation  $\Rightarrow$  f.s. gilt (mit Satz 2.8)

$$\forall m \geq n, \forall t \leq T_n : \langle M^{T_m} \rangle_t = \langle M^{T_n} \rangle_t. \quad (2.24)$$

Demnach ist

$$\langle M \rangle_t := \langle M^{T_n} \rangle_t \text{ für } t \leq T_n$$

wohldefiniert (mit Setzung  $\langle M \rangle_t \equiv 0$  auf dem Nullereignis, dass (2.24) nicht gilt,  $\langle M \rangle$  ist adaptiert, hat stetige, nicht-fallende Pfade und  $\langle M \rangle_0 = 0$ . Nach Konstruktion ist (bis auf Ununterscheidbarkeit)

$$(M_{t \wedge T_n}^2 - M_0^2 - \langle M^{T_n} \rangle_{t \wedge T_n})_{t \geq 0} = (M_{t \wedge T_n}^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_{t \wedge T_n})_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c,$$

d.h.  $(M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t)_t$  ist lokales Martingal.

Zur „Polarisierungsformel“ für die quadratische Kovariation beachte:

Sei  $(T_n)_n$  lokalisierende Stoppfolge für  $M$ ,  $(S_n)_n$  lokalisierende Stoppfolge für  $N$ , o.E. seien  $M^{T_n}$ ,  $N^{S_n}$  beschränkt (vgl. Bem. 2.33), dann kann  $R_n := T_n \wedge S_n$  als lokalisierende Stoppfolge für  $M$  und  $N$  gemeinsam verwendet werden. □

**Definition 2.37.** Für  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  sei  $\mathcal{P}(M)$  die Menge aller progressiv messbaren  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  mit

$$\inf_{T > 0} \mathbb{P} \left( \int_0^T Y_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty \right) = 1$$

(dies ersetzt/ergänzt Def. 2.19 aus dem  $\mathcal{L}^2$ -Fall).

Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit lokalisierender Stoppfolge  $(T_n)_n$ ,  $Y \in \mathcal{P}(M)$ ,

$$S_n := n \wedge \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t Y_s^2 d\langle M \rangle_s \geq n \right\} \quad (\text{ist beschr. Stoppzeit}),$$

$S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$  und  $S_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ , setze

$$R_n := S_n \wedge T_n \quad (\text{ist eine beschr. Stoppzeit}),$$

$$M_t^{(n)} := M_{t \wedge R_n}, \quad Y_t^{(n)} := Y_t \mathbf{1}_{\{t \leq R_n\}}, \quad t \geq 0,$$

dann gilt  $M^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$  und  $Y^{(n)} \in \mathcal{L}(M)$ , d.h.  $\int_0^t Y_s^{(n)} dM_s^{(n)}$  ist wohldefiniert (nach Satz 2.24). Mit Kor. 2.3I, 2. gilt f.s.

$$\text{für alle } m \geq n : \int_0^t Y_s^{(n)} dM_s^{(n)} = \int_0^t Y_s^{(m)} dM_s^{(m)} \text{ für } 0 \leq t \leq R_n, \quad (2.25)$$

d.h.

$$(Y \bullet M)_t := \int_0^t Y dM := \int_0^t Y_s^{(n)} dM_s^{(n)} \text{ für } 0 \leq t \leq R_n \quad (2.26)$$

(mit Setzung  $\equiv 0$  auf dem Nullereignis, dass (2.25) nicht gilt) ist wohldefiniert.

Es gilt  $Y \bullet M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  (denn  $Y^{(n)} \bullet M^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$  für jedes  $n$ ), die Definition hängt (bis auf Ununterscheidbarkeit) nicht von der lokalisierenden Stoppfolge  $(T_n)$  ab: Sei  $(T'_n)$  eine weitere lokalisierende Stoppfolge,  $I' = (I'_t)_{t \geq 0}$  obiger Prozess mit  $T'_n$  anstelle von  $T_n$ , so gilt  $I'_t = \int_0^t Y dM$  für  $0 \leq t \leq T_n \wedge T'_n$  und jedes  $n$ , d.h.  $I' = Y \bullet M$ .

Der Prozess in (2.26) heißt das *stochastische Integral* von  $Y$  ( $\in \mathcal{P}(M)$ ) bezüglich  $M$  ( $\in \mathcal{M}_{loc}^c$ ).

**Proposition 2.38** („lokale Version“ von Prop. 2.25). Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ ,  $X, Y \in \mathcal{P}(M)$

1.  $\int_0^0 X dM = 0$

2. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist

$$\int_0^t aX_s + bY_s dM_s = a \int_0^t X_s dM_s + b \int_0^t Y_s dM_s, \quad t \geq 0$$

3.  $\langle \int_0^\cdot X dM, \int_0^\cdot Y dN \rangle_t = \int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s$  (für  $X \in \mathcal{P}(M), Y \in \mathcal{P}(N)$ ) bis auf Ununterscheidbarkeit, insbesondere  $\langle \int_0^\cdot X dM \rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$ .

4.  $\tau$  eine Stoppzeit,  $\tilde{X}_t := X_t \mathbf{1}_{t \leq \tau}$ , so gilt f.s.

$$\int_0^{t \wedge \tau} X dM = \int_0^t \tilde{X} dM, \quad t \geq 0.$$

**Proposition 2.39** („lokale Version“ von Satz 2.30). Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ ,  $X \in \mathcal{P}(M)$ . Das stochastische Integral  $X \bullet M$  ist das (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige stetige lokale Martingal  $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{f.s.}$$

für jedes  $N \in \mathcal{M}_{loc}^c$ .

**Definition 2.40.** Ein stochastischer Prozess  $(X_t)$  heißt ein (stetiges) *Semimartingal*, wenn er eine Zerlegung der Form

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad t \geq 0$$

besitzt, wobei  $M = (M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^c$  und  $A = (A_t)_{t \geq 0}$  ein adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden von lokal endlicher Variation und  $A_0 = 0$ .

(Die Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit:  $X_t = X_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$ , so ist  $A_t - \tilde{A}_t = \tilde{M}_t - M_t$  ein stetiges lokales Martingal mit Pfaden von lokal endlicher Variation  $\Rightarrow A_t \equiv \tilde{A}_t, M_t \equiv \tilde{M}_t$  f.s. gem. Lemma 2.35.)

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &:= \mathcal{P}(M) \cap \{Y : \mathbb{P}(\int_0^t |Y_s| d|A|_s < \infty) = 1 \quad \forall t \geq 0\} \\ &= \left\{ Y \text{ progressiv m.b., } \int_0^t |Y_s| d|A|_s < \infty, \int_0^t Y_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \text{ f.s. } \forall t \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

(wobei  $|A|_t = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k=t} \sum_{i=1}^k |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|$ ,  $t \geq 0$  der Totalvariationsprozess von  $A$  ist, vgl. (2.17)) und definieren für  $Y \in \mathcal{P}(X)$  das stochastische Integral

$$(Y \bullet X)_t := \int_0^t Y dX := \int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t Y_s dA_s, \quad t \geq 0$$

(wobei  $\int_0^t Y_s dM_s$  ein Integral gemäß Def. 2.37,  $\int_0^t Y_s dA_s$  ein (realisierungsweises) Lebesgue-Stieltjes-Integral ist).

Wir setzen

$$\langle X \rangle_t := \langle M \rangle_t \quad (\text{die quadratische Variation von } X)$$

und für ein stetiges Semimartingal  $\tilde{X}$  mit Zerlegung  $\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$

$$\langle X, \tilde{X} \rangle_t := \langle M, \tilde{M} \rangle_t \quad (\text{die quadratische Kovariation von } X \text{ und } \tilde{X}).$$

**Beobachtung 2.41.** Sei  $X$  Semimartingal.

1.  $Y \in \mathcal{P}(X)$ , so ist  $Y \bullet X$  selbst ein Semimartingal (denn  $\int_0^\cdot Y dM$  ist lokales Martingal,  $\int_0^\cdot Y dA$  hat lokal endliche Variation).
2.  $Y$  progressiv m.b. mit  $\sup_{t \leq T} |Y_t| < \infty$  f.s. für jedes  $T > 0$ , so ist  $Y \in \mathcal{P}(X)$ . Dies gilt insbesondere, wenn  $Y$  stetige Pfade besitzt.
3. Die Eigenschaften aus Prop. 2.38 gelten auch für das Integral bezüglich Semimartingalen.

**Satz 2.42** („dominierte Konvergenz für das stochastische Integral“).  $X$  stetiges Semimartingal,  $(K_t^{(n)})_{t \geq 0}, (K_t)_{t \geq 0}$  progressiv messbar und lokal beschränkt (d.h.  $\sup_{s \leq t} |K_t^{(n)}|, \sup_{s \leq t} |K_t| < \infty$  f.s.  $\forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}$ ) und es gelte (f.s.)

$$\forall n, t : |K_t^{(n)}| \leq K_t \quad \text{sowie} \quad K_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann gilt für alle  $T > 0$

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t K_s^{(n)} dX_s \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.27)$$

(d.h.  $K^{(n)} \bullet X$  konvergiert ( $\mathbb{P}$ -)stochastisch lokal gleichmäßig gegen 0).

*Beweis.* Sei  $X_t = X_0 + M_t + A_t$  die kanonische Zerlegung,  $T > 0$ .

Für  $t \leq T$  ist

$$\left| \int_0^t K_s^{(n)} dA_s \right| \leq \int_0^t |K_s^{(n)}| d|A|_s \leq \int_0^T |K_s^{(n)}| d|A|_s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{f.s.}$$

(verwende – realisierungsweise – den Satz von der dominierten Konvergenz).

Nehme zunächst an, dass

$$M \in \mathcal{M}_2^c \quad \text{und} \quad \sup_{t \geq 0} |K_t| \leq c \quad \text{für ein } c \in [0, \infty),$$

dann gilt

$$\left( \int_0^t K_s^{(n)} dM_s \right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c \quad \text{mit} \quad \left\langle \int_0^t K_s^{(n)} dM_s \right\rangle_t = \int_0^t (K_s^{(n)})^2 d\langle M \rangle_s$$

nach Satz 2.24 und Prop. 2.25, 4. Für  $\varepsilon > 0$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t K_s^{(n)} dM_s \right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T K_s^{(n)} dM_s\right)^2\right] \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\int_0^T (K_s^{(n)})^2 d\langle M \rangle_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile die Doobische  $L^2$ -Ungleichung und in der zweiten Zeile dominierte Konvergenz für das Maß  $\mu(A) := \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{1}_A(\omega, s) d\langle M \rangle_s\right]$  (für progressiv messbares  $A \subset \Omega \times [0, T]$ ) verwendet haben, d.h. (2.27) gilt in diesem Fall.

Allgemeiner Fall ( $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ ) : Sei  $T_m, m \in \mathbb{N}$  lokalisierende Stoppfolge für  $M$ ,

$$\tau_m := T_m \wedge m \wedge \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq m\} \wedge \inf\{t \geq 0 : K_t \geq m\}$$

(es gilt  $\tau_m \nearrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$  f.s.),

$$M_t^{(m)} := M_{t \wedge \tau_m}, \quad K_t^{(n,m)} := K_t^{(n)} \mathbf{1}_{\{t \leq \tau_m\}},$$

für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und  $t \leq \tau_m$  ist

$$\int_0^t K^{(n)} dM = \int_0^t K^{(n,m)} dM^{(m)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

(nach Satz 2.24:  $M^{(m)} \in \mathcal{M}_2^c$  und  $\|K^{(n,m)}\|_{\mathcal{L}(M^{(m)})} \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ ).  $\square$

**Korollar 2.43.** Seien  $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\} \subset \mathbb{R}_+$ ,  $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots$  mit  $t_m^{(n)} \nearrow_{m \rightarrow \infty} \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Partitionen mit  $\sup_{m \in \mathbb{N}} |t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $X$  Semimartingal,  $K$  linksstetiger, adaptierter, lokal beschränkter Prozess. Dann gilt

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} K_{t_{m-1}^{(n)}} \left( X_{t \wedge t_m^{(n)}} - X_{t \wedge t_{m-1}^{(n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t K_s dX_s \quad \text{lokal gleichmäßig } \mathbb{P}\text{-stochastisch.} \quad (2.28)$$

*Beweis.* Nehme zunächst an, dass  $\sup_{t \geq 0} |K_t| \leq c$  für ein  $c \in [0, \infty)$  und (o.E.) dass  $K_0 = 0$ . Setze

$$K_t^{(n)} := \sum_m K_{t_{m-1}^{(n)}} \mathbf{1}_{(t_{m-1}^{(n)}, t_m^{(n)}]}(t),$$

$K^{(n)} \in \mathcal{L}_0$  und

$$K_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

(realisierungsweise, denn  $K$  hat linksstetige Pfade). Die linke Seite in (2.28) ist gleich  $\int_0^t K^{(n)} dX$  (nach Definition), die Beh. folgt dann mit Satz 2.42.

Für den allgemeinen Fall lokalisiere wie im Beweis von Satz 2.42.  $\square$

**Satz 2.44.**  $X$  stetiges Semimartingal,  $V \in \mathcal{P}(X)$ ,  $Y := \int_0^\cdot V dX$ ,  $U$  progressiv messbar. Dann gilt

$$U \in \mathcal{P}(Y) \quad \text{g.d.w.} \quad (U_t V_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}(X)$$

und in diesem Fall gilt (f.s.)

$$\int_0^t U_s dY_s = \int_0^t U_s V_s dX_s.$$

*Beweis.* Sei  $X_t = X_0 + M_t + A_t$  die kanonische Zerlegung,

$$Y_t = \int_0^t V_s dM_s + \int_0^t V_s dA_s =: Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$$

mit  $Y^{(1)} \in \mathcal{M}_{loc}^c$ ,  $Y^{(2)}$  hat (lokal endlichen) Totalvariationsprozess  $\int_0^t |V_s| d|A|_s$ .

Es ist  $U \in \mathcal{P}(Y)$  g.d.w.

$$\int_0^t U_s^2 d\langle Y^{(1)} \rangle_s \stackrel{\text{Prop. 2.38}}{=} \int_0^t U_s^2 V_s^2 d\langle X \rangle_s < \infty \text{ f.s. für alle } t \geq 0$$

und  $\int_0^t |U_s| d|Y^{(2)}|_s = \int_0^t |U_s| |V_s| d|A|_s < \infty \text{ f.s. für alle } t \geq 0,$

also  $U \in \mathcal{P}(Y) \iff UV \in \mathcal{P}(X)$ .

Es gilt

$$\int_0^t U_s dY_s^{(2)} = \int_0^t U_s V_s dA_s$$

(dies gilt stets für Lebesgue-Stieltjes-Integrale,  $Y^{(2)}$  ist Verteilungsfunktion des [signierten] Maßes  $V_s dA_s$ ; Multiplikation von Dichten).

Sei  $N \in \mathcal{M}_{loc}^c$ , es ist (mit Prop. 2.39)

$$\left\langle \int_0^\cdot U_s dY_s^{(1)}, N \right\rangle_t = \int_0^t U_s d\langle Y^{(1)}, N \rangle_s = \int_0^t U_s V_s d\langle M, N \rangle_s = \left\langle \int_0^\cdot U_s V_s dM_s, N \right\rangle_t,$$

also (wiederum mit Prop. 2.39)

$$\int_0^t U dY^{(1)} = \int_0^t UV dM.$$

□

## 2.5 Itô-Formel (und einige Anwendungen)

**Proposition 2.45** (Partielle Integration für stochastische Integrale).  $X, Y$  stetige Semimartingale, dann gilt (f.s.)

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t, \quad t \geq 0, \quad (2.29)$$

insbesondere

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t, \quad t \geq 0. \quad (2.30)$$

*Beweis.* Sei  $M \in \mathcal{M}_2^c$ , zeige

$$M_t^2 - M_0^2 = 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M \rangle_t, \quad t \geq 0$$

. Im Beweis von Satz 2.12 hatten wir geschrieben

$$M_t^2 - M_0^2 = 2 \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} (M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}) + \sum_{k \geq 1} (M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}})^2 =: I_t^{(n)} + A_t^{(n)}$$

mit Stoppzeitenfolgen

$$\tau_1^{(n)} := 0, \tau_{k+1}^{(n)} := \inf \left\{ t > \tau_k^{(n)} : |M_t - M_{\tau_k^{(n)}}| = 2^{-n} \right\}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

und  $I_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)} dM_s$  mit  $H_t^{(n)} = \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \mathbf{1}_{(\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}]}(t)$  und hatten eine Teilfolge  $n_j \nearrow \infty$  gewählt mit

$$\sup_{t \leq T} |A_t^{(n_j)} - \langle M \rangle_t| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s. für alle } T \geq 0$$

$$\text{sowie für ein } (I_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c : \sup_{t \leq T} |I_t^{(n_j)} - I_t| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s. für alle } T \geq 0.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\forall t \geq 0 : H_t^{(n)} \rightarrow M_t \quad (M \text{ hat stetige Pfade})$$

und

$$|H_t^{(n)}| \leq \sup_{s \leq t} |M_s| =: K_t,$$

mit Satz 2.42 also

$$I_t^{(n)} = \int_0^t H_s^{(n)} dM_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t M_s dM_s \quad (\mathbb{P}\text{-})\text{stochastisch lokal gleichmäßig}$$

$\Rightarrow I_t = \int_0^t M_s dM_s$ , d.h. (2.30) gilt in diesem Fall.

Sei  $(A_t)$  adaptiert mit stetigen Pfaden von lokal endlicher Totalvariation,  $A_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t A_s dA_s &= 2 \int_0^t \left( \int_0^s dA_u \right) dA_s = 2 \int_{(0,t]^2} \mathbf{1}_{\{u \leq s\}} dA_u dA_s \\ &= \int_{(0,t]^2} dA_u dA_s = \left( \int_0^t dA_s \right)^2 = A_t^2, \end{aligned}$$

d.h. (2.30) gilt für  $X = A$  (denn  $\langle A \rangle = 0$ ).

Es gilt  $M_t A_t - M_0 A_0 = \int_0^t M_s dA_s + \int_0^t A_s dM_s$  :

Sei  $t_k^{(n)} := \frac{k}{2^n} \wedge t$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , mit partieller Summation ist

$$M_t A_t - \underbrace{M_0 A_0}_{=0} = \underbrace{\sum_{k \geq 1} M_{t_k^{(n)}} (A_{t_k^{(n)}} - A_{t_{k-1}^{(n)}})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t M_s dA_s \text{ realisierungsweise}} + \underbrace{\sum_{k \geq 1} A_{t_{k-1}^{(n)}} (M_{t_k^{(n)}} - M_{t_{k-1}^{(n)}})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t A_s dM_s \text{ } (\mathbb{P}\text{-})\text{stoch. lokal gleichm. mit Satz 2.42}}$$

Somit

$$\begin{aligned} (M_t + A_t)^2 - \underbrace{(M_0 + A_0)}_{=0} &= M_t^2 - M_0^2 + A_t^2 + 2M_t A_t \\ &= 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M \rangle_t + 2 \int_0^t A_s dA_s + 2 \int_0^t M_s dA_s + 2 \int_0^t A_s dM_s, \end{aligned}$$

d.h. (2.30) gilt für  $X = M + A$ .

Der allgemeine Fall folgt daraus durch Lokalisierung: (2.30) gilt für  $X = M^{T_n} + A^{T_n}$ , wo  $(T_n)$  lokalisierende Stoppfolge.

(2.29) folgt aus (2.30) durch Polarisierung:

$$\begin{aligned} X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \frac{1}{4} (X_t + Y_t)^2 - \frac{1}{4} (X_0 + Y_0)^2 - \frac{1}{4} (X_t - Y_t)^2 + \frac{1}{4} (X_0 - Y_0)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 2 \int_0^t (X + Y) d(X + Y) + \langle X + Y \rangle_t - 2 \int_0^t (X - Y) d(X - Y) - \langle X - Y \rangle_t \right) \\ &= \int_0^t X dY + \int_0^t Y dX + \langle X, Y \rangle_t. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.46** (Itô<sup>2</sup>-Formel).  $X$  stetiges Semimartingal,  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , so gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s, \quad t \geq 0 \quad (2.31)$$

(insbes. ist  $(f(X_t))_{t \geq 0}$  wiederum ein Semimartingal).

**Bemerkung 2.47.** 1. Der Term  $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$  kommt in der klassischen Kettenregel nicht vor, dies ist der sog. Itô-Korrekturterm.

2. Intuitiv kann man die Itô-Formel durch Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung einsehen:

$$f(X_{t+h}) - f(X_t) \approx \underbrace{f'(X_t) (X_{t+h} - X_t)}_{\approx dX_t} + \frac{1}{2} \underbrace{f''(X_t) (X_{t+h} - X_t)^2}_{\approx d\langle X \rangle_t}.$$

(Man kann dies auch zu einem „wasserdichten“ Beweis ausbauen, wir folgen unten allerdings einem etwas eleganteren Weg.)

*Beweis von Satz 2.46.* Sei  $\mathcal{A} := \{f \in C^2(\mathbb{R}) : (2.31) \text{ gilt für } f\}$ , offenbar ist  $\mathcal{A}$  ein  $(\mathbb{R})$ -Vektorraum,  $f(x) \equiv 1$  und  $f(x) = x$  liegen in  $\mathcal{A}$ . Zeige

$$f, g \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad fg \in \mathcal{A}.$$

<sup>2</sup>Kiyoshi Itô, 1915–2008; Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 20, 519–524, (1944)  
[Itô, 1944; Kunita-Watanabe 1967 f. d. allg. Fall]

$$F_t := f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

$$G_t := g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

sind (n. Vor.) stetige Semimartingale, also

$$\begin{aligned} (fg)(X_t) - (fg)(X_0) &= F_t G_t - F_0 G_0 \stackrel{\text{Prop. 2.45}}{=} \int_0^t F_s dG_s + \int_0^t G_s dF_s + \langle F, G \rangle_t \\ &\stackrel{\text{Satz 2.44, Beob. 2.41}}{=} \int_0^t f(X_s) g'(X_s) dX_s + \int_0^t f(X_s) \frac{1}{2} g''(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &\quad + \int_0^t g(X_s) f'(X_s) dX_s + \int_0^t g(X_s) \frac{1}{2} f''(X_s) d\langle X \rangle_s + \int_0^t f'(X_s) g'(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= \int_0^t \underbrace{(fg' + f'g)(X_s)}_{=(fg)'} dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{(fg'' + 2f'g' + f''g)(X_s)}_{=(fg)''} d\langle X \rangle_s. \end{aligned}$$

Insbesondere enthält  $\mathcal{A}$  alle Polynome.

Sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  bel. (und o.E.  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ , sonst ersetze durch  $\tilde{f}(x) := f(x) - f(0) - x f'(0)$ ), nach Weierstraß'schem Approximationssatz gibt es Polynome  $p_n(x)$  mit

$$\sup_{|x| \leq n} |f''(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zweimaliges Aufintegrieren liefert Polynome  $f_n$  mit

$$\sup_{|x| \leq n} \left\{ |f(x) - f_n(x)| \vee |f'(x) - f'_n(x)| \vee |f''(x) - f''_n(x)| \right\} \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sei  $X_t = X_0 + M_t + A_t$  die kanonische Zerlegung

$$\int_0^t f'_n(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_n(X_s) d\langle X \rangle_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f'(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

(realisierungsweise, verwende dominierte Konvergenz).

Sei  $\tau_c := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq c\}$  ( $\nearrow \infty$  für  $c \rightarrow \infty$ ), es gilt

$$\forall c > 0 : \int_0^{t \wedge \tau_c} f'_n(X_s) dM_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau_c} f'(X_s) dM_s \quad (2.32)$$

( $\mathbb{P}$ -)stoch. lokal gleichm. mit Satz 2.42, also auch  $\int_0^t f'_n(X_s) dM_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f'(X_s) dM_s$  ( $\mathbb{P}$ -)stoch. lokal gleichm.). Dies zeigt die Beh., denn die Itô-Formel (2.31) gilt für jedes  $f_n$ .  $\square$

**Definition 2.48.** Ein stochastischer Prozess  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$  mit Werten in  $\mathbb{R}^d$  heißt ein  $d$ -dimensionales (vektorwertiges) stetiges Semimartingal (bzw.  $d$ -dimensionales lokales Martingal), wenn jeder Koordinatenprozess  $X^{(i)}$  ein stetiges Semimartingal (bzw. ein lokales Martingal) ist.

Ein Prozess  $X$  mit Werten in  $\mathbb{C}$  heißt ein (komplexwertiges) Semimartingal (bzw. lokales Martingal), wenn dies für  $\text{Re}(X)$  und  $\text{Im}(X)$  gilt.

**Satz 2.49** (*d*-dim. Itô-Formel).  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$  *d*-dimensionales stetiges Semimartingal,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(X_s) dX_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(X_s) d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s, \quad t \geq 0. \quad (2.33)$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} := \{f \in C^2(\mathbb{R}) : (2.33) \text{ gilt für } f\}$ , offenbar ist  $\mathcal{A}$  ein  $(\mathbb{R})$ -Vektorraum,  $f(x) \equiv 1$  liegt in  $\mathcal{A}$ . Zeige

$$f \in \mathcal{A}, \ell \in \{1, \dots, d\} \Rightarrow g(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) := x^{(\ell)} f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \text{ liegt in } \mathcal{A}. \quad (2.34)$$

Sei  $F_t := f(X_t)$ , dann ist

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_0) &= X_t^{(\ell)} F_t - X_0^{(\ell)} F_0 \stackrel{\text{Prop. 2.45}}{=} \int_0^t X_s^{(\ell)} dF_s + \int_0^t F_s dX_s^{(\ell)} + \langle F, X^{(\ell)} \rangle_t \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^d \int_0^t X_s^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial x_j} f(X_s) dX_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^t X_s^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(X_s) d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s \\ &\quad + \int_0^t f(X_s) dX_s^{(\ell)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} f(X_s) d\langle X^{(j)}, X^{(\ell)} \rangle_s \\ &= \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} g(X_s) dX_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} g(X_s) d\langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_s, \end{aligned}$$

wobei wir in  $(*)$  die Voraussetzung  $f \in \mathcal{A}$  und Satz 2.44 verwendet haben, um  $\int_0^t X_s^{(\ell)} dF_s$  umzuformen sowie Prop. 2.25 / Prop. 2.38, um  $\langle F, X^{(\ell)} \rangle_t$  auszurechnen. Für die letzte Gleichung beachte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} g(x) &= x^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \delta_{\ell j} f(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} g(x) &= \begin{cases} x^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(x), & \ell \notin \{j, k\} \\ x^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), & \ell = j \neq k \\ x^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} f(x), & \ell = j = k \end{cases} \\ &= x^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(x) + \delta_{\ell j} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) + \delta_{\ell k} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x). \end{aligned}$$

Demnach gilt (2.34), somit enthält  $\mathcal{A}$  alle Polynome in  $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$ , der Rest des Beweises verläuft analog zum eindimensionalen Fall in Satz 2.46.  $\square$

**Korollar 2.50** (zeitabhängige Itô-Formel). Sei  $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  (d.h.  $f(x, t)$  ist zweimal stetig nach  $x$  und einmal stetig nach  $t$  differenzierbar),  $X$  stetiges Semimartingal, dann gilt

$$f(X_t, t) - f(X_0, 0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s, s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(X_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s, s) d\langle X \rangle_s. \quad (2.35)$$

*Beweis.*  $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) := (X_t, t)$  ist ein 2-dim. Semimartingal,  $\langle X^{(1)}, X^{(2)} \rangle_t \equiv 0$ . Nach Satz 2.49 gilt (2.35), wenn  $f \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Die 2. Ableitung nach  $t$  kommt in der Formel nicht vor, das Approximationsargument wie im Beweis von Satz 2.46 / Satz 2.49 greift.  $\square$

**Beobachtung 2.51.** Sei  $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  (oder auch  $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ ) mit  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \equiv 0$ . Für  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  ist  $(f(M_t, \langle M \rangle_t))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^c$ , insbesondere ist für  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Z_t := \exp\left(\lambda M_t - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle M \rangle_t\right), \quad t \geq 0 \quad \text{ein lokales Martingal.}$$

Für  $\lambda = 1$  heißt  $Z_t = e^{M_t - \langle M \rangle_t / 2}$  das Doléans(-Dade)-Exponential<sup>3</sup> von  $M$ , es gilt  $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s$ .

*Beweis.* Mit Kor. 2.50 ist

$$f(M_t, \langle M \rangle_t) = f(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(M_s, \langle M \rangle_s) dM_s + 0$$

ein lokales Martingal (denn es ist ein stochastisches Integral bezüglich eines lokalen Martingals).

$$f(x, y) := \exp(\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 y) \text{ erfüllt } \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \lambda^2 \exp(\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 y), \frac{\partial}{\partial y} f = -\frac{1}{2} \lambda^2 \exp(\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 y). \quad \square$$

**Erinnerung** (vgl. Def. 1.1).  $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$  ist  $d$ -dim. (Standard-)Brownbewegung, wenn  $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$  u.a. eindimensionale (Standard-)Brownbewegungen sind.

(Äquivalent:  $B_0 = \mathbf{0}$ ,  $B$  hat stetige Pfade und unabhängige Zuwächse,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{I})$ .)

**Definition 2.52.**  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  Filtration, ein stetiger  $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess  $B$  heißt  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ -Brownsche Bewegung, wenn er  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ -adaptiert ist und es gilt

$$\forall 0 \leq s < t : \quad B_t - B_s \text{ ist u.a. von } \mathcal{G}_s \text{ und } \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{I})\text{-verteilt.}$$

**Beobachtung 2.53.**  $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$   $d$ -dim. Brownbewegung, so ist  $B$  ein  $d$ -dim. Martingal mit  $\langle B^{(j)}, B^{(k)} \rangle_t = \delta_{jk} t$ .

**Satz 2.54** (Lévy's Charakterisierung der BB). Sei  $X$  stetiger adaptierter Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}^d$ ,  $X_0 = \mathbf{0}$ . Dann sind äquivalent:

$$X \text{ ist } (\mathcal{F}_t)\text{-Brownsche Bewegung} \tag{2.36}$$

und

$$X \text{ ist lokales } (\mathcal{F}_t)\text{-Martingal und für } j, k = 1, \dots, d \text{ ist } \langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_t = \delta_{jk} t, \quad t \geq 0 \text{ (f.s.)} \tag{2.37}$$

*Beweis.* (2.36)  $\Rightarrow$  (2.37):  $\checkmark$  nach Beob. 2.53

(2.37)  $\Rightarrow$  (2.36): Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $M_t := \alpha \cdot X_t (= \alpha_1 X_t^{(1)} + \dots + \alpha_d X_t^{(d)})$  ist stetiges lokales Martingal,  $\langle M \rangle_t = \sum_{j,k=1}^d \alpha_j \alpha_k \langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_t = \|\alpha\|^2 t$ , also ist (mit Beob. 2.51)

$$Z_t := \exp\left(i \alpha \cdot X_t + \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 t\right)$$

---

<sup>3</sup>nach Catherine Doléans-Dade, 1942–2004

(mit  $i = \sqrt{-1}$ ) ein lokales Martingal, wegen  $\sup_{t \leq T} |Z_t| \leq e^{|\alpha|^2 T/2} < \infty$  ist  $Z$  ein Martingal.

Demnach für  $0 \leq s \leq t$ ,  $Y$  beschr.,  $\mathcal{F}_s$ -m.b. ZVE

$$0 = \mathbb{E}[(Z_t - Z_s)Y] = \mathbb{E}\left[\left(e^{i\alpha \cdot (X_t - X_s) + \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 (t-s)} - 1\right) e^{i\alpha \cdot X_s + \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 s} Y\right].$$

Wähle  $Y := \mathbf{1}_A e^{-i\alpha \cdot X_s - \frac{1}{2} \|\alpha\|^2 s}$  mit  $A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\alpha \cdot (X_t - X_s)} \mathbf{1}_A\right] = e^{-\frac{1}{2} \|\alpha\|^2 (t-s)} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = e^{-\frac{1}{2} \|\alpha\|^2 (t-s)} \mathbb{P}(A)$$

$\Rightarrow$  (da dies für alle  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in \mathcal{F}_s$  gilt)

$$X_t - X_s \text{ ist u.a. von } \mathcal{F}_s \text{ und } X_t - X_s \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{I}).$$

□

**Satz 2.55** (Dambis, Dubins, Schwarz<sup>4</sup>). *( $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  filtrierter  $W$ raum, der den üblichen Bedingungen genügt.) Sei  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit  $\langle M \rangle_t \nearrow \infty$  f.s., für  $t \geq 0$  setze*

$$\tau_t := \inf\{u \geq 0 : \langle M \rangle_u > t\}, \quad \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_{\tau_t}, \quad B_t := M_{\tau_t}$$

( $(\tau_t)_t$  ist die rechtsstetige verallgemeinerte Inverse von  $\langle M \rangle$ ).

Dann ist  $(B_t)$  eine  $(\mathcal{H}_t)$ -Brownsche Bewegung, für  $s \geq 0$  ist  $\langle M \rangle_s$  eine  $(\mathcal{H}_t)$ -Stoppzeit und  $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$ ,  $t \geq 0$  f.s.

*Beweis.*  $M_{\tau_t}$  ist  $(\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{H}_t)$ -messbar  $\Rightarrow B$  ist adaptiert (bzgl.  $(\mathcal{H}_t)$ )

Zeige:

$$\text{für } s < t \text{ gilt } \{\langle M \rangle_s = \langle M \rangle_t\} \subset \{M_u = M_s \ \forall u \in [s, t]\} \text{ f.s.} \quad (2.38)$$

nehme dazu zunächst an, dass  $M \in \mathcal{M}_2^c$ , beseitige die Annahme schließlich via Lokalisierung (Übung).

Für  $q \in \mathbb{Q}_+$  sei  $S_q := \inf\{u > q : \langle M \rangle_u > \langle M \rangle_q\}$ , für  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r \geq q$  ist

$$\mathbb{E}\left[M_{S_q \wedge r}^2 - \langle M \rangle_{S_q \wedge r} \mid \mathcal{F}_q\right] = M_q^2 - \langle M \rangle_q$$

, also

$$\mathbb{E}\left[(M_{S_q \wedge r} - M_q)^2 \mid \mathcal{F}_q\right] = \mathbb{E}\left[M_{S_q \wedge r}^2 - M_q^2 - \underbrace{\langle M \rangle_{S_q \wedge r} + \langle M \rangle_q}_{=0 \text{ n. Def.}} \mid \mathcal{F}_q\right] = 0,$$

somit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r \in \mathbb{Q}, r > q} \{M_q = M_{S_q \wedge r}\}\right) = 1,$$

was zusammen mit Pfadstetigkeit von  $M$  (2.38) zeigt. Demnach ist  $t \mapsto B_t$  f.s. stetig.

Zeige:

$$(B_t) \text{ und } (B_t^2 - t) \text{ sind lokale Martingale (bzgl. } (\mathcal{H}_t)). \quad (2.39)$$

<sup>4</sup>K.E. Dambis, On decomposition of continuous submartingales. *Teor. Verojatn. i Primenen* 10, 438–448, (1965); Lester E. Dubins, Gideon Schwarz, On continuous martingales. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 53, 913–916, (1965).

Sei  $T_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| > n\}$ ,  $U_n := \langle M \rangle_{T_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\tau_{t \wedge U_n} = \inf\{u \geq 0 : \langle M \rangle_u > t \wedge U_n\} = T_n \wedge \tau_t$$

und

$$B_{t \wedge U_n} = M_{T_n \wedge \tau_t} =: M_{\tau_t}^{T_n}$$

$U_n$  ist  $(\mathcal{H}_t)$ -Stoppzeit, denn  $\{U_n \leq t\} = \{T_n \leq \tau_t\} \in \mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{H}_t$ .

Sei  $s < t$ :

$$\mathbb{E}[B_{t \wedge U_n} | \mathcal{H}_s] = \mathbb{E}[M_{\tau_t}^{T_n} | \mathcal{F}_{\tau_s}] = M_{\tau_s}^{T_n} = B_{s \wedge U_n} \quad \text{f.s.}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{t \wedge U_n}^2 - (t \wedge U_n) | \mathcal{H}_s] &= \mathbb{E}[(M_{\tau_t}^{T_n})^2 - \underbrace{(t \wedge \langle M \rangle_{T_n})}_{=\langle M \rangle_{\tau_t}} | \mathcal{F}_{\tau_s}] \\ &= \underbrace{(M_{\tau_t}^{T_n})^2}_{=(M)_{\tau_t \wedge T_n} = (M^{T_n})_{\tau_t}} - \langle M^{T_n} \rangle_{\tau_t} \\ &= (M_{\tau_s}^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle_{\tau_s} = B_{t \wedge U_n} - (s \wedge U_n) \end{aligned}$$

d.h. (2.39) gilt mit lokalisierender Stoppfolge  $(U_n)_n$  (wegen  $T_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} \infty$  und  $\langle M \rangle_t \nearrow_{t \rightarrow \infty} \infty$  gilt auch  $U_n \nearrow \infty$ ).

Mit Lévy's Charakterisierung der BB (Satz 2.54) folgt:

$(B_t)$  ist  $(\mathcal{H}_t)$ -Brownsche Bewegung.

Weiter ist  $\{\langle M \rangle_t \leq u\} = \{\tau_u \geq t\} \in \mathcal{F}_{\tau_u} = \mathcal{H}_u$ , d.h.  $\langle M \rangle_t$  ist  $(\mathcal{H}_t)$ -Stoppzeit.

Schließlich:

$$B_{\langle M \rangle_t} = M_{\tau_{\langle M \rangle_t}} = M_t$$

□

**Bemerkung 2.56.** 1. Es gibt eine  $d$ -dimensionale Version von Satz 2.55:  $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(d)})$   $d$ -dim. lokales Martingal mit  $\langle M^{(j)} \rangle_t \nearrow \infty$  und  $\langle M^{(j)}, M^{(k)} \rangle \equiv 0$  f.s. für  $j \neq k$ . Setze  $\tau_t^{(j)} := \inf\{u \geq 0 : \langle M^{(j)} \rangle_u > t\}$ , so ist

$$(M_{\tau_t^{(1)}}^{(1)}, \dots, M_{\tau_t^{(d)}}^{(d)})_{t \geq 0} \quad d\text{-dim. BB}$$

Wenn  $\langle M^{(1)} \rangle = \dots = \langle M^{(d)} \rangle$ , so kann  $M$  als Zeittransformation einer  $d$ -dimensionalen BB dargestellt werden.

2. Falls (in der Sit. von Satz 2.55)  $\mathbb{P}(\langle M \rangle_\infty < \infty) > 0$ , so kann man sich durch „Ankleben einer unabhängigen Fortsetzung“ immer noch eine auf ganz  $\mathbb{R}_+$  definierte BB beschaffen:

Es gilt

$$\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} \subset \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existiert} \right\} \quad \text{f.s.} \quad (2.40)$$

Dazu beobachte

$$\begin{aligned} X &\in \mathcal{M}_{loc}^c \text{ mit } X_0 = 0, \mathbb{E}[\langle X \rangle_t] < \infty \\ \Rightarrow (X_s^2 - \langle X \rangle_s)_{0 \leq s \leq t} &\text{ ist Martingal (und insbes. ist } (X_s)_{0 \leq s \leq t} \mathcal{L}^2\text{-beschr. Mart.) (2.41)} \end{aligned}$$

denn sei  $\sigma_n, n \in \mathbb{N}$  gemeinsame lokalisierende Stoppfolge für  $X$  und  $X^2 - \langle X \rangle (= 2 \int_0^\cdot X dX)$  so ist

$$\left( \mathbb{E}[\langle X \rangle_{t \wedge \sigma_n}] = \right) \mathbb{E}[X_{t \wedge \sigma_n}^2] \leq \mathbb{E}\left[ \sup_{s \leq t \wedge \sigma_n} X_s^2 \right] \leq 4\mathbb{E}[X_{t \wedge \sigma_n}^2] = 4\mathbb{E}[\langle X \rangle_{t \wedge \sigma_n}]$$

(wobei wir für das zweite Ungleichungszeichen die Doob-Ungleichung verwendet haben), mit  $n \rightarrow \infty$  und monotoner Konvergenz folgt

$$\left( \mathbb{E}[\langle X \rangle_t] \leq \right) \mathbb{E}\left[ \sup_{s \leq t} X_s^2 \right] \leq 4\mathbb{E}[\langle X \rangle_t] < \infty,$$

was (2.41) beweist, da  $Y := \langle X \rangle_t + \sup_{s \leq t} X_s^2$  eine integrierbare Majorante bildet.

Zu (2.40):  $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$  ist Martingal mit

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(M_{t \wedge \tau_n})^2] = \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\langle M \rangle_{t \wedge \tau_n}] \leq n$$

(nach Def. von  $\tau_n$  aus Satz 2.55), demnach gilt mit (2.41)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau_n} = M_{\tau_n} \text{ existiert f.s. (und ist offenbar } = M_\infty \text{ auf } \{\tau_n = \infty\}),$$

somit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n = \infty\} \subset \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existiert} \right\}$$

d.h. (2.41) gilt.

Sei  $(\beta_s)_{s \geq 0}$  eine Brownbewegung, u.a. von  $\sigma(M_t, t \geq 0)$ , dann ist

$$B_t := \begin{cases} M_{\tau_t}, & t < \langle M \rangle_\infty, \\ M_\infty + \beta_{t - \langle M \rangle_\infty}, & t \geq \langle M \rangle_\infty \end{cases}$$

eine Brownsche Bewegung.

3. Man kann Satz 2.55 verwenden, um f.s.-Pfedeigenschaften der Brownschen Bewegung auf allgemeinere stetige lokale Martingale zu übertragen.

**Satz 2.57** (BDG-Ungleichung<sup>5</sup>). Für  $p > 0$  gibt es  $c_p \in (0, \infty)$ , so dass für jedes  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit  $M_0 = 0$  gilt

$$\frac{1}{c_p} \mathbb{E}[(\langle M \rangle_t)^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_t^*)^p] \leq c_p \mathbb{E}[(\langle M \rangle_t)^{p/2}], \quad t \geq 0, \quad (2.42)$$

wobei  $M_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} M_s$ .

<sup>5</sup>Verschiedene Arbeiten dazu von Donald L. Burkholder, Burgess Davis und Richard F. Gundy, insbesondere Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, 1970/1971), Vol. II: Probability theory*, pp. 223–240. Univ. California Press, Berkeley, 1972.

**Beobachtung 2.58.**  $N \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit  $N_0 = 0$ ,  $a < 0 < b$ ,  $\sigma_x^t := \inf\{u \geq 0 : N_u = x\} \wedge t$ ,  $N_t^* := \sup_{s \leq t} N_s$ , so gilt

$$\mathbb{P}(\sigma_b^t < \sigma_a^t) \leq \frac{-a}{b-a} \mathbb{P}(N_t^* > 0).$$

*Beweis.* Optional sampling ( $(N_{s \wedge \sigma_b^t \wedge \sigma_a^t})_{s \geq 0}$  ist beschränkt) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[N_{\sigma_b^t \wedge \sigma_a^t}] \geq a\mathbb{P}(\sigma_a^t \leq \sigma_b^t, N_t^* > 0) + b\mathbb{P}(\sigma_b^t < \sigma_a^t) \\ &= a\mathbb{P}(N_t^* > 0) - a\mathbb{P}(\sigma_b^t < \sigma_a^t) + b\mathbb{P}(\sigma_b^t < \sigma_a^t) \end{aligned}$$

(beachte dass  $\{N_t^* = 0\} \subset \{N_s = 0 \text{ für } s \leq t\}$  f.s. mit Satz 2.55 und der entsprechenden Eigenschaft der BB, nämlich  $\inf\{t > 0 : B_t < 0\} = \inf\{t > 0 : B_t > 0\} = 0$  f.s. bei Start in  $B_0 = 0$ ).

Demnach

$$(-a)\mathbb{P}(N_t^* > 0) \geq (b-a)\mathbb{P}(\sigma_b^t < \sigma_a^t).$$

□

*Beweis von Satz 2.57.* Wir nehmen (zunächst) an,

dass  $M$  und  $\langle M \rangle$  beschränkt sind

(man beseitigt diese Annahme schließlich via optionales stoppen, Übung).

Sei  $p > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : M_t^2 = r\}$ ,

$$M'_t := M_t - M_{t \wedge \tau_r}, \quad N_t := (M'_t)^2 - \langle M' \rangle_t \quad (M', N \in \mathcal{M}_{loc}^c \text{ mit } M'_0 = N_0 = 0).$$

Für  $c \in (0, 2^{-p})$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq 4r) - \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq cr) &\leq \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq 4r, \langle M \rangle_t < cr) \\ &\stackrel{(\text{Def. von } N)}{\leq} \mathbb{P}(N_t^* \geq r - cr, \inf_{s \leq t} N_s > -cr) \\ &\leq c\mathbb{P}(N_t^* > 0) \leq c\mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq r) \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile Beob. 2.58 mit  $a = -cr$ ,  $b = r - cr$  verwendet haben, also

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq 4r) dr - \int_0^\infty \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq cr) dr \\ \leq c \int_0^\infty \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq r) dr = c\mathbb{E}[\left((M_t^*)^2\right)^{p/2}] = c\mathbb{E}[(M_t^*)^p]. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq 4r) dr &= \int_0^\infty \frac{p}{2} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}(M_t^* \geq x) \frac{1}{2} x dx \\ &= 2^{-p} \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(M_t^* \geq x) dx = 2^{-p} \mathbb{E}[(M_t^*)^p] \end{aligned}$$

(wir haben  $x = 2\sqrt{r} \Leftrightarrow r = x^2/4$ , also  $dr/dx = \frac{1}{2}x$  substituiert) und

$$\int_0^\infty \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq cr) dr = c^{-p/2} \int_0^\infty \frac{p}{2} x^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq x) dx = c^{-p/2} \mathbb{E}[(\langle M \rangle_t)^{p/2}]$$

(wir haben  $cr = x$  substituiert), demnach

$$(2^{-p} - c)\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right] \leq c^{-p/2}\mathbb{E}\left[(\langle M \rangle_t)^{p/2}\right],$$

d.h. die rechte Ungleichung in (2.42) gilt für  $c_p \geq \frac{c^{-p/2}}{2^{-p}-c}$ .

Setze nun  $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t = r\}$ , dann  $M', N$  wie oben, wähle  $c \in (0, 2^{-\frac{p}{2}-2})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq 2r) - \mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq cr) &\leq \mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq 2r, (M_t^*)^2 < cr) \\ &\leq \mathbb{P}(N_t^* < 4cr, \inf_{s \leq t} N_s < 4cr - r) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{-4cr}{(4cr - r) - 4cr} \mathbb{P}(\inf_{s \leq t} N_s < 0) \stackrel{(**)}{=} 4c\mathbb{P}(\tau_r < t) = 4c\mathbb{P}(\langle M \rangle_t \geq r) \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) Beob. 2.58 auf  $-N$  angewendet haben und in (\*\*) Satz 2.55 / Bem. 2.56, 3. (und die entsprechende Eigenschaft der Brownbewegung).

Multipliziere mit  $\frac{p}{2}r^{\frac{p}{2}-1}$ , integriere  $r$  über  $[0, \infty)$ , erhalte wie oben

$$2^{-p/2}\mathbb{E}\left[(\langle M \rangle_t)^{p/2}\right] - c^{-p/2}\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right] \leq 4c\mathbb{E}\left[(\langle M \rangle_t)^{p/2}\right],$$

d.h.

$$(2^{-p/2} - 4c)\mathbb{E}\left[(\langle M \rangle_t)^{p/2}\right] \leq c^{-p/2}\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right],$$

die linke Ungleichung in (2.42) gilt für  $c_p \geq \frac{c^{-p/2}}{2^{-p/2}-4c}$ . □

**Korollar 2.59.**  $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$  mit  $\mathbb{E}[|M_0|] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{1/2}] < \infty$  für alle  $t \geq 0$ , so ist  $M$  ein Martingal.

Wenn sogar  $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty$ , so ist  $M$  gleichgradig integrierbar.

(und: wenn  $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$  für alle  $t \geq 0$ , so ist  $M \in \mathcal{M}_2^c$ .)

## 2.6 Brownsche Bewegung und harmonische Funktionen

Sei  $(B_t)_{t \geq 0}$   $d$ -dim. BB, unter  $\mathbb{P}_x$  in  $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$  startend,  $U \subset \mathbb{R}^d$  Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend),

$$\tau_U := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin U\} \quad (\text{die Austrittszeit aus } U).$$

**Bemerkung 2.60.**  $U$  beschränkt, so ist  $\mathbb{E}_x[\tau_U] < \infty$ , insbesondere ist  $\mathbb{P}_x(\tau_U < \infty) = 1$  für alle  $x$ .

*Beweis.*  $d = 1$ :  $U = (-a, b) \ni x = 0$ , so ist  $\mathbb{E}_0[\tau_U] = ab < \infty$ ,

mit Verschiebungsinvarianz  $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}_x[\tau_{(a,b)}] = \mathbb{E}_0[\tau_{(a-x, b-x)}] < \infty \quad \text{für } a < x < b.$$

$d > 1$ :  $x \in U \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{d-1}$  für geeignete  $a < b$ , also

$$\mathbb{E}_x[\tau_U] \leq \mathbb{E}_x[\tau_{(a,b) \times \mathbb{R}^{d-1}}] < \infty. \quad \square$$

Für  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal (partiell) differenzierbar sei

$$\Delta f := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} f \quad (\text{Laplace-Operator}).$$

( $f$  heißt *harmonisch* (in  $U$ ), wenn  $\Delta f(x) = 0$  (für  $x \in U$ ) gilt.)

**Lemma 2.61** (Dynkin<sup>6</sup>-Formel).  $U$  Gebiet,  $f \in C^2(U)$ ,  $x \in U_0$  relativ kompaktes Gebiet mit  $\overline{U_0} \subset U$ , so gilt für jede Stoppzeit  $\tau \leq \tau_{U_0}$

$$\mathbb{E}_x[f(B_\tau)] - f(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau \frac{1}{2} \Delta f(B_s) ds\right]. \quad (2.43)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} M_t &:= f(B_{t \wedge \tau_{U_0}}) - f(B_0) - \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_{U_0}} \Delta f(B_s) ds \\ &\stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} \sum_{j=1}^d \int_0^{t \wedge \tau_{U_0}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(B_s) dB_s^{(j)}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

liegt in  $\mathcal{M}_{loc}^c$  mit

$$\langle M \rangle_t = \int_0^{t \wedge \tau_{U_0}} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f(B_s) \right)^2 ds = \int_0^{t \wedge \tau_{U_0}} \|\nabla f(B_s)\|^2 ds,$$

also

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}_x[\langle M \rangle_t] \leq \sup_{y \in \overline{U_0}} \|\nabla f(y)\|^2 \cdot \mathbb{E}_x[\tau_{U_0}] < \infty$$

$\Rightarrow$  (mit Bem. 2.56, 2. oder Kor. 2.59)

$$M \in \mathcal{M}_2^c \quad \text{und } M \text{ ist gleichgradig integrierbar, somit } \mathbb{E}_x[M_0] = 0 = \mathbb{E}_x[M_\tau],$$

d.h. (2.43). □

**Korollar 2.62.**  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\tau_\varepsilon := \tau_{B_\varepsilon(x)}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\varepsilon > 0$ , so gilt

$$\widehat{A}f(x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_\varepsilon}) - f(x)]}{\mathbb{E}_x[\tau_\varepsilon]} = \frac{1}{2} \Delta f(x) \quad (2.44)$$

(charakteristischer Operator [der BB])

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_\varepsilon}) - f(x)]}{\mathbb{E}_x[\tau_\varepsilon]} - \frac{1}{2} \Delta f(x) \right| &\stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_\varepsilon]} \left| \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \Delta f(B_s) - \frac{1}{2} \Delta f(x) \right) ds \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} |\Delta f(y) - \Delta f(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

---

<sup>6</sup>Eugene B. Dynkin, 1924-2014

**Beispiel 2.63.**  $B$   $d$ -dim. BB,  $B_0 = 0$ ,  $U = B_r(0) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $r > 0$ , so gilt

$$\mathbb{E}_0[\tau_U] = \frac{r^2}{d}.$$

(denn  $f(x) := \|x\|^2$  erfüllt  $\Delta f(x) = 2d$ ,

$$r^2 - 0 = \mathbb{E}_0[f(\tau_U)] - f(0) = \mathbb{E}_0\left[\int_0^{\tau_U} d ds\right] = d \mathbb{E}_0[\tau_U]$$

nach Lemma 2.6I (Dynkin-Formel))

**Definition 2.64.**  $U$  Gebiet,  $f \in C(\partial U)$ .  $h \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  heißt *Lösung des Dirichlet-Problems* auf  $U$  zum Randwert  $f$ , wenn gilt

$$\Delta h \equiv 0 \text{ auf } U, \quad h = f \text{ auf } \partial U.$$

**Satz 2.65.** Sei  $h$  Lösung Dirichlet-Problems auf  $U$  mit Randwert  $f$  und es gelte  $\mathbb{P}_x(\tau_U < \infty) = 1$  für alle  $x \in U$ . Dann ist

$$h(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_U})]. \quad (2.45)$$

Umgekehrt definiert (2.45) für  $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und messbar eine Funktion  $h \in C^2(U)$  mit

$$\Delta h \equiv 0 \text{ auf } U, \quad (2.46)$$

$$\lim_{t \uparrow \tau_U} h(B_t) = f(B_{\tau_U}) \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \quad \forall x \in U. \quad (2.47)$$

*Beweis.* Sei  $h$  Lösung. Es ist

$$h(B_t) = h(B_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} h(B_s) dB_s^{(j)}, \quad t < \tau_U \quad (2.48)$$

(mit Itô-Formel), d.h.

$$(h(B_t))_t \text{ ist lokales Martingal bis } \tau_U$$

(d.h. es gibt Stoppzeiten  $\tau_n \nearrow \tau_U$  so dass  $(h(B_{t \wedge \tau_n}))_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ ).

Seien  $U_n \subset U_{n+1} \subset \dots \subset U$  mit  $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$  und  $U_n \nearrow U$ , schreibe

$$\tau = \tau_U, \quad \tau_n = \tau_{U_n}.$$

$$\mathbb{E}_x[\langle h(B) \rangle_{\tau_n}] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_n} \|\nabla h(B_s)\|^2 ds\right] < \infty \quad \text{für jedes } n \quad (2.49)$$

$\Rightarrow$  ((2.48) ist "echtes" Martingal bis  $\tau_n$ ) somit ist  $\mathbb{E}_x[h(B_{\tau_n})] = \mathbb{E}_x[h(B_0)] = h(x)$ ,  
weiterhin

$$h(B_{\tau_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(B_{\tau_U}) = f(B_{\tau_U}) \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

( $\tau_n \nearrow \tau_U$ ,  $B$  hat stetige Pfade,  $h \in C(\bar{U})$  mit  $h = f$  auf  $\partial U$ ),

dominierte Konvergenz liefert (beachte  $\sup_x |h(x)| < \infty$ )

$$\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_U})] = \mathbb{E}_x\left[\lim_{n \rightarrow \infty} h(B_{\tau_n})\right] = h(x).$$

Sei nun  $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  beschr., m.b.,  $h$  gegeben durch (2.45).

$$h(B_{\tau_n}) = \mathbb{E}_{B_{\tau_n}}[f(B_\tau)] = \mathbb{E}_x[f(B_\tau) | \mathcal{F}_{\tau_n}] \quad (\text{f.s.}) \quad (2.50)$$

(gemäß der starken Markov-Eigenschaft der BB), d.h.

$$(h(B_{\tau_n}))_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschr. Martingal (bzgl. jedem } \mathbb{P}_x),$$

somit

$$h(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_U})] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_U}) | \mathcal{F}_{\tau_n}]] = \mathbb{E}_x[h(B_{\tau_n})] \quad \text{für } n \text{ gen. groß, dass } x \in U_n.$$

Wähle  $U_1 = B_r(x) \subset U$ , so erfüllt  $h$

$$h(x) = \int_{\partial B_r(x)} h(y) \mu_{B_r(x)}(dy) \quad (\text{„klassische“ Mittelwerteigenschaft})$$

wo  $\mu_{B_r(x)}$  das normierte Oberflächenmaß auf der Kugeloberfläche  $\partial B_r(x)$  ist,

$$\Rightarrow \Delta h(x) = 0$$

(z.B. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Kap. I.3).

Weiter ist

$$\lim_{t \nearrow \tau_U} h(B_t) \stackrel{\substack{B \text{ stetig,} \\ h \in C(\bar{U})}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h(B_{\tau_n}) \stackrel{\substack{\text{Martingalkonv.} \\ \text{und (2.50)}}}{=} \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_U}) | \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{\tau_n})] \stackrel{\substack{B_\tau \text{ ist} \\ \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{\tau_n})\text{-m.b.}}}{=} f(B_\tau).$$

□

**Bericht 2.66** (zur Lösbarkeit des Dirichlet-Problems). Ein Randpunkt  $z \in \partial U$  des Gebiets  $U$  heißt

$$\text{regulär, wenn } \mathbb{P}_z(\inf\{t > 0 : B_t \notin U\} = 0) = 1 \text{ gilt}$$

(mit Blumenthals 0-1-Gesetz (Satz 1.9) gilt stets  $\mathbb{P}_z(\inf\{t > 0 : B_t \notin U\} = 0) \in \{0, 1\}$ ).

1. Sei  $f \in C_b(\partial U)$ ,  $z \in \partial U$  regulär, so erfüllt  $h$  aus (2.45) in Satz 2.65

$$\lim_{x \rightarrow z, x \in U} h(x) = f(z).$$

(Siehe z.B. [Ka, Lemma 24.6].)

2. Ein einfaches „Gegenbeispiel“:  $d = 2$ ,  $U = B_1(0) \setminus \{0\}$ , so ist  $0 \in \partial U$  nicht regulär (wie wir sehen werden: dies folgt aus Kor. 2.68).

3.  $z \in \partial U$  ist regulär, wenn die Kegelbedingung<sup>7</sup> erfüllt ist: für einen Kegel  $C$  mit Spitze  $z$  und eine offene Umgebung  $V \ni z$  gilt  $C \cap V \subset U^c$ .

(Siehe z.B. [Ka, Lemma 24.4].)

4. Ein nicht-triviales Beispiel für einen nicht-regulären Randpunkt bildet die sog. Lebesguesche<sup>8</sup> Nadel (auch: Lebesguescher Dorn), beispielsweise folgendermaßen parametrisiert:

$$U = (-1, 1)^3 \setminus \left( \{(x, y, z) : z > 0, x^2 + y^2 \leq e^{-1/z^2}\} \cup \{(0, 0, 0)\} \right),$$

$(0, 0, 0)$  ist nicht regulär.

(Siehe z.B. [KS, Ch. 4, Ex. 2.17 (“Lebesgue’s Thorn”)].)

**Lemma 2.67.**  $d \geq 2$ ,  $0 < r < R$ ,  $\tau := \inf \{t \geq 0 : \|B_t\| \in \{r, R\}\}$  so gilt für  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $r < \|x\| < R$

$$h_{r,R}^{(d)}(x) := \mathbb{P}_x(\|B_\tau\| = r) = \begin{cases} \frac{\log(R) - \log(\|x\|)}{\log(R) - \log(r)}, & d = 2, \\ \frac{\|x\|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}, & d \geq 3. \end{cases} \quad (2.51)$$

*Beweis.*  $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_2(x) = \log(\|x\|)$  und  $\varphi_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_d(x) = 1/\|x\|^{d-2}$ ,  $d \geq 3$  sind harmonisch, demnach sind die in (2.51) angegebenen Funktionen harmonisch (auf  $\{x : x \neq 0\}$ ) mit Randwerten  $\equiv 1$  auf  $\{x : \|x\| = r\}$ ,  $\equiv 0$  auf  $\{x : \|x\| = R\}$ , Beh. folgt mit Satz 2.65.  $\square$

**Korollar 2.68** (Einzelne Punkte sind polar in  $d \geq 2$ ). 1.  $\tilde{\tau}_x := \inf\{t > 0 : B_t = x\}$ , so gilt für  $d \geq 2$

$$\mathbb{P}_y(\tilde{\tau}_x < \infty) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

2. Für  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $\|x\| > r > 0$  gilt

$$\mathbb{P}_x(\inf_{t \geq 0} \|B_t\| \leq r) = \begin{cases} 1, & d = 2, \\ \left(\frac{\|x\|}{r}\right)^{2-d}, & d \geq 3. \end{cases}$$

*Beweis.* 1. Sei o.E.  $x = 0$ , betr. zunächst  $y \neq 0$ , sei  $r < \|y\| < R$ ,  $\tau$  wie in Lemma 2.67.

$$\mathbb{P}_y(\tilde{\tau}_0 < \tau_{B_R(0)}) \leq \mathbb{P}_y(\|B_\tau\| = r) = h_{r,R}^{(d)}(y) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

somit  $\mathbb{P}_y(\tilde{\tau}_0 \geq \tau_{B_R(0)}) = 1$  für jedes solche  $R$ , d.h.

$$1 = \mathbb{P}_y(\tilde{\tau}_0 \geq \underbrace{\sup_{R \in \mathbb{N}} \tau_{B_R(0)}}_{=\infty, \text{ Pfadstetigk. von } B}).$$

Für  $y = 0$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\tilde{\tau}_0 < \infty) &= \lim_{h \downarrow 0} \underbrace{\mathbb{P}_0(B_t = 0 \text{ für ein } t > h)}_{=} = 0. \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{P}_{B_h}(\tilde{\tau}_0 < \infty)] = 0 \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Stanislaw Zaremba 1863–1942; 1911

<sup>8</sup>Henri Lebesgue, 1875–1941; 1912

2. Mit  $\tau = \tau(r, R)$  wie in Lemma 2.67 ist

$$\mathbb{P}_x\left(\inf_{t \geq 0} \|B_t\| \leq r\right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(B_\tau = r) = \lim_{R \rightarrow \infty} h_{r,R}^{(d)}(x) = \begin{cases} 1, & d = 2, \\ \left(\frac{\|x\|}{r}\right)^{2-d}, & d \geq 3. \end{cases}$$

□

**Satz 2.69.** 1. Die 2-dim. BB ist rekurrent in dem Sinn, dass

$$\mathbb{P}\left(\sup\{t : B_t \in U\} = \infty \ \forall U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\right) = 1,$$

insbesondere ist  $\overline{\{B_t : t \geq 0\}} = \mathbb{R}^2$  f.s.

2. Für  $d \geq 3$  ist die  $d$ -dim. BB transient:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B_t\| = \infty \text{ f.s.}$$

*Beweis.* 1. Sei  $x \in \mathbb{Q}^2$ ,  $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ . Konstruiere mit Kor. 2.68, 2 (und Verschiebungsinvarianz) und der starken Markoveigenschaft der BB eine Folge von Stoppzeiten  $T_n \nearrow \infty$  mit  $T_{n+1} \geq T_n + 1$  und  $B_{T_n} \in B_\varepsilon(x)$ .

2. Mit Bem. 2.60 ist  $\tau_{B_n(0)} < \infty$  f.s. für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , wegen der Stetigkeit der Pfade gilt  $\tau_{B_n(0)} \nearrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Demnach ist für  $r > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \|B_t\| \leq r\right) &= \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\|B_t\| = r \text{ für ein } t > \tau_{B_n(0)}\}\right) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}_x(\|B_t\| = r \text{ für ein } t > \tau_{B_n(0)})}_0 = 0. \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{B_{\tau_{B_n(0)}}}(\inf_s \|B_s\| \leq r)\right] = (n/r)^{2-d} \end{aligned}$$

□

**Vorbemerkung.** Via Zerlegung in Real- und Imaginärteil  $\mathbb{C} \ni z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  können wir  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  identifizieren (sofern für unsere Zwecke nützlich/angemessen).

Insbesondere: eine zweidimensionale Brownbewegung  $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$  kann via  $B_t^{(1)} + iB_t^{(2)}$  auch als komplexwertige Brownbewegung aufgefasst werden.

Sei  $(B_t) = (B_t^{(1)} + iB_t^{(2)})$  komplexe BB,  $\theta \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $(e^{i\theta} B_t)$  eine komplexe BB; sei  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , so zeigt die Skalierungseigenschaft, dass

$$\mathbb{P}_0\left(\left(\phi(B_t)\right)_{t \geq 0} \in \cdot\right) = \mathbb{P}_b\left(\left(B_{|a|^2 t}\right)_{t \geq 0} \in \cdot\right).$$

Insbesondere ist das Bild eines Brownschen Pfads unter einer linearen Transformation von  $\mathbb{C}$  wiederum ein (ggfs. zeittransformierter) Brownscher Pfad.

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, wenn  $\varphi'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}$  für jedes  $z_0 \in U$  existiert (d.h.  $\varphi$  komplex differenzierbar in  $U$ ). Eine in  $U$  holomorphe Funktion ist analytisch (d.h. um jeden Punkt von  $U$  in eine Taylorreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar), gemäß den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind sowohl Real- als auch Imaginärteil von  $\varphi$  harmonisch in  $U$ . Ein solches  $\varphi$  ist *konform* („winkeltreu“).

**Satz 2.70.**  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $B$  komplexe BB mit  $B_0 = z_0$ , setze

$$\tau_U := \inf\{s \geq 0 : B_s \notin U\} \leq +\infty.$$

Dann gibt es eine komplexe BB  $(\tilde{B}_t)$  mit

$$\varphi(B_t) = \tilde{B}_{C_t} \quad \text{für } 0 \leq t < \tau_U,$$

wobei

$$C_t = \int_0^t |\varphi'(B_s)|^2 ds.$$

*Beweis.* Wir schreiben  $\varphi = g + ih$  (Zerlegung in Real- und Imaginärteil), insbes. sind  $g, h$  harmonisch in  $U$ .

Die Itô-Formel, angewendet auf  $g(B_t^{(1)} + iB_t^{(2)})$ , zeigt für  $t < \tau_U$

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(B_s) dB_s^{(1)} + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(B_s) dB_s^{(2)}$$

und analog

$$h(B_t) = h(B_0) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(B_s) dB_s^{(1)} + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial y}(B_s) dB_s^{(2)}.$$

Demnach sind  $M_t := g(B_t), N_t := h(B_t)$  stetige lokale Martingale auf dem (zufälligen) Zeitintervall  $[0, \tau_U)$ .

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ( $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$ ) zeigen (mit Prop. 2.38)

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial x}(B_s) \right)^2 ds + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial y}(B_s) \right)^2 ds = \int_0^t |\varphi'(B_s)|^2 ds = C_t$$

und analog

$$\langle N \rangle_t = C_t, \quad \langle M, N \rangle_t = 0.$$

Mit  $\sigma_t := \inf\{u : C_u > t\}$  und Satz 2.55 (Dambis, Dubins, Schwarz), bzw. Bem. 2.56 zum mehrdim. Fall:

$$\tilde{B}_t^{(1)} := M_{\sigma_t}, \quad \tilde{B}_t^{(2)} := N_{\sigma_t} \quad \text{sind 1-dim. BBen,} \quad \text{mit } \langle \tilde{B}^{(1)}, \tilde{B}^{(2)} \rangle_t = 0.$$

$\Rightarrow$  (mit Lévy's Charakterisierung der BB, Satz 2.54)

$$\tilde{B} := (\tilde{B}^{(1)}, \tilde{B}^{(2)}) \quad \text{ist (2-dim./komplexe) BB}$$

und nach Konstruktion ist

$$\varphi(B_t) = (g(B_t), h(B_t)) = (\tilde{B}_{C_t}^{(1)}, \tilde{B}_{C_t}^{(2)}) = \tilde{B}_{C_t} \quad \text{für } 0 \leq t < \tau_U.$$

Bem.: Zunächst ist  $\tilde{B}_t$  nur auf dem (zufälligen) Intervall  $[0, C_{\tau_U})$  definiert, man kann sie durch „Ankleben einer unabhängigen Kopie“ auf ganz  $[0, \infty)$  definieren, vgl. Bem. 2.56.  $\square$

## 2.7 Zur Black-(Merton-)Scholes-Formel<sup>9</sup>

**Marktmodell** Sei  $(W_t)_{t \geq 0}$  (standard-)Brownsche Bewegung,  $\sigma > 0$  (die „Volatilität“),  $\mu, r \in \mathbb{R}$  ( $r$  ist die „Zinsrate“),

- $S = (S_t)_{t \geq 0}$  Lösung von

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

(Aktie, engl. „Stock“, ein Wertpapier, dessen Preis zufällig schwankt),

- $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$  Lösung von  $\frac{d\beta_t}{dt} = r\beta_t$  (Sparbuch, engl. „Bond“, ein festverzinsliches Wertpapier mit deterministischem Preis)

mit  $\beta_0 = 1$  fest,  $S_0$  u.a. von  $W$  (und wir messen die jew. Werte in Euro, sagen wir).

Offenbar ist  $\beta_t = e^{rt}$ , weiter gilt

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

(d.h.  $S$  ist eine geometrische Brownsche Bewegung), wie man anhand der zeitabhängigen Itô-Formel (Kor. 2.50) verifiziert.

Marktteilnehmer können (im Modell) zu jedem Zeitpunkt (beliebige) Anteile/Vielfache von  $S$  und  $\beta$  kaufen oder verkaufen.

**Optionen (ein Beispiel)** Seien  $K > 0, T > 0$ . Eine (europäische) Kaufoption („call option“) mit Ausübungspreis  $K$  („strike price“) und Fälligkeit  $T$  („maturity“)

beinhaltet das Recht (aber nicht die Pflicht) zum Zeitpunkt  $T$  eine Aktie zum Preis  $K$  zu kaufen, d.h. der Wert zum Zeitpunkt  $T$  ist  $(S_T - K)^+$ .

Frage: „fairer“ Preis der Option zur Zeit  $t = 0$ ?

**Portfolio / Handelsstrategie** Sei  $H$  ein linksstetiger,  $\mathbb{R}^2$ -wertiger, adaptierter Prozess, wir schreiben  $H_t = (H_t^{(1)}, H_t^{(2)})$ .

Interpretation: Wir halten zum Zeitpunkt  $t$   $H_t^{(1)}$  Einheiten von  $S$  und  $H_t^{(2)}$  Einheiten von  $\beta$ , d.h. der (Nominal-)Wert unseres Portfolios zur Zeit  $t$  ist

$$V_t^{(H)} = H_t^{(1)} S_t + H_t^{(2)} \beta_t.$$

$H$  heißt *selbstfinanzierend*, falls gilt

$$V_t^{(H)} = V_0^{(H)} + \int_0^t H_u^{(1)} dS_u + \int_0^t H_u^{(2)} d\beta_u, \quad t \geq 0.$$

---

<sup>9</sup>Nach Fisher Black (1938–1995), Robert Carhart Merton (\*1944) und Myron Samuel Scholes (\*1941); F. Black und M.S. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Economy* 81, 637–659, (1973) sowie R.C. Merton, Theory of rational option pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), 141–183, (1973).

Merton und Scholes erhielten 1997 für ihre Arbeiten den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Interpretation: Beginnend mit dem „Startkapital“  $V_0^{(H)}$  wird das Vermögen (ggfs. kontinuierlich) zwischen Aktie und Sparbuch umgeschichtet, aber es wird weder Kapital entnommen noch hinzugefügt.

Idealisierungen (des Marktmodells):

- kontinuierliches Handeln möglich
- keine Transaktionskosten

**Beispiel.**  $H_t^{(j)} = L_1^{(j)} \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + L_2^{(j)} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}$ ,  $j = 1, 2$  mit  $\tau$  Stoppzeit,  $\mathcal{F}_0$ -messbaren  $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}$  und  $\mathcal{F}_\tau$ -messbaren  $L_2^{(1)}, L_2^{(2)}$  (d.h. es gibt einen „Umschichtungszeitpunkt“), es gelte

$$V_{\tau-}^{(H)} = L_1^{(1)} S_\tau + L_1^{(2)} \beta_\tau = L_2^{(1)} S_\tau + L_2^{(2)} \beta_\tau = V_{\tau+}^{(H)}$$

(„Umschichtungsbedingung“).

Dann ist  $H$  tatsächlich selbstfinanzierend: Es ist

$$\begin{aligned} V_{t \wedge \tau}^{(H)} - V_0^{(H)} &= L_1^{(1)} (S_{t \wedge \tau} - S_0) + L_1^{(2)} (\beta_{t \wedge \tau} - \beta_0) = \int_0^{t \wedge \tau} H_u^{(1)} dS_u + \int_0^{t \wedge \tau} H_u^{(2)} d\beta_u \\ V_t^{(H)} - V_{t \wedge \tau}^{(H)} &= L_2^{(1)} (S_t - S_{t \wedge \tau}) + L_2^{(2)} (\beta_t - \beta_{t \wedge \tau}) = \int_{t \wedge \tau}^t H_u^{(1)} dS_u + \int_{t \wedge \tau}^t H_u^{(2)} d\beta_u, \end{aligned}$$

(mit der Umschichtungsbedingung) also gilt tatsächlich

$$V_t^{(H)} - V_0^{(H)} = \int_0^t H_u^{(1)} dS_u + \int_0^t H_u^{(2)} d\beta_u \quad \text{für jedes } t \geq 0.$$

**Beobachtung 2.71** (Wechsel des Numéraire und Selbstfinanzierungs-Bedingung). Sei

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{\beta_t}, \quad \tilde{V}_t^{(H)} := \frac{V_t^{(H)}}{\beta_t} \quad \left( \text{und } \tilde{\beta}_t := \frac{\beta_t}{\beta_t} = 1 \right).$$

(diskontierte, bzw. in Einheiten von  $\beta$  ausgedrückte Werte; im Jargon: Wir verwenden  $\beta$  als «Numéraire» [=Wertmaß])

$$H \text{ ist selbstfinanzierend} \iff \tilde{V}_t^{(H)} = \tilde{V}_0^{(H)} + \int_0^t H_u^{(1)} d\tilde{S}_u \quad \text{für } t \geq 0.$$

Insbesondere: Ein vorgebener (adaptierter, linksstetiger) reellwertiger Prozess  $(H_t^{(1)})_{t \geq 0}$  kann durch die Setzung

$$H_t^{(2)} := V_0 + \int_0^t H_u^{(1)} d\tilde{S}_u - H_t^{(1)} \tilde{S}_t$$

stets zu einem selbstfinanzierenden Portfolio  $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$  mit gegebenem Startwert  $V_0 (= V_0^{(H)} = \tilde{V}_0^{(H)})$  ergänzt werden.

Beweis. „ $\Leftarrow$ “ : Es ist

$$\begin{aligned} dV_u^{(H)} &= d(\beta \cdot \tilde{V}^{(H)})_u = \beta_u d\tilde{V}_u^{(H)} + \tilde{V}_u^{(H)} d\beta_u + \underbrace{d\langle \beta, \tilde{V}^{(H)} \rangle_u}_{=0} \\ &= \beta_u H_u^{(1)} d\tilde{S}_u + \tilde{V}_u^{(H)} d\beta_u = \beta_u H_u^{(1)} \left( \frac{1}{\beta_u} dS_u - \frac{S_u}{\beta_u^2} d\beta_u \right) + \frac{1}{\beta_u} (H_u^{(1)} S_u + H_u^{(2)} \beta_u) d\beta_u \\ &= H_u^{(1)} dS_u + H_u^{(2)} d\beta_u, \end{aligned}$$

d.h.  $H$  ist selbstfinanzierend.

„ $\Rightarrow$ “ : Sei  $H$  selbstfinanzierend, dann ist

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_u^{(H)} &= \frac{1}{\beta_u} dV_u^{(H)} - \frac{V_u^{(H)}}{\beta_u^2} d\beta_u + \underbrace{d\langle 1/\beta, \tilde{V}^{(H)} \rangle_u}_{=0} \\ &= \frac{1}{\beta_u} (H_u^{(1)} dS_u + H_u^{(2)} d\beta_u) - \frac{H_u^{(1)} S_u + H_u^{(2)} \beta_u}{\beta_u^2} d\beta_u \\ &= H_u^{(1)} \left( \frac{1}{\beta_u} dS_u - \frac{S_u}{\beta_u^2} d\beta_u \right) = H_u^{(1)} d\tilde{S}_u. \end{aligned}$$

Zum Zusatz: Mit obiger Setzung ist dann

$$H_t^{(1)} \tilde{S}_t + \underbrace{H_t^{(2)} \tilde{\beta}_t}_{=1} = \tilde{V}_t^{(H)} = \tilde{V}_0^{(H)} + \int_0^t H_u^{(1)} d\tilde{S}_u.$$

□

**Optionen (allg. europäische Optionen)**  $T > 0$ , ein (contingent) claim mit Laufzeit / Fälligkeit  $T$  ist eine (reellwertige)  $\mathcal{F}_T$ -messbare ZV  $C$  (wir nehmen zusätzlich an:  $C$  ist nach unten beschränkt).

Ein selbstfinanzierendes Portfolio  $H$  dupliziert  $C$ , wenn gilt  $V_T^{(H)} = C$  f.s.

**Prinzip der Arbitragefreiheit** (Arbitrage = Möglichkeit eines risikolosen Gewinns)

$$p(C) := \text{„fairer“ Preis von } C = V_0^{(H)},$$

wenn  $H$  ein selbstfinanzierendes duplizierendes Portfolio für  $C$  ist.

Insbesondere ist (in einem arbitragefreien Marktmodell)  $p(C)$  damit eindeutig festgelegt, sonst gäbe es Arbitrage.

**Beispiel 2.72** (Optionen/Derivate mit Basiswert / “Underlying”  $S$ ).

1.  $C = S_T - K$  (“Forward”, ein Termingeschäft)

Wähle  $H_t^{(1)} = 1$ ,  $H_t^{(2)} = -Ke^{-rT}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$  ist s.-f. mit  $V_T^{(H)} = H_T^{(1)} S_T + H_T^{(2)} \beta_T = S_T - Ke^{-rT} e^{rT} = S_T - K$ , also  $p(C) = V_0^{(H)} = S_0 - Ke^{-rT}$ .

2. a)  $C = (S_T - K)^+$  (europäischer Call),      b)  $C = (K - S_T)^+$  (europäischer Put)

3. Allg. europäische Option mit Laufzeit  $T$ :

$$C = h(S_T) \quad \text{mit } h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig (und nach unten beschr.)}$$

(und, sagen wir,  $\sup_x |h(x)|/(1+|x|)^m < \infty$  für ein  $m$ )

Frage: Fairer Preis der Option  $C$ ? Duplikationsstrategie?

**Ansatz zur Lösung** (sozusagen implizit eine Markovannahme an den Wertprozess stellend):

Gesucht  $v : [0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (gen. glatt) und ein selbstfinanzierendes Portfolio  $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ , so dass

$$V_t^{(H)} = v(S_t, t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad \text{und} \quad V_T^{(H)} = C.$$

Die Selbstfinanzierungs-Bedingung ergibt dann

$$\begin{aligned} dV_t^{(H)} &= H_t^{(1)} dS_t + H_t^{(2)} d\beta_t = H_t^{(1)} dS_t + \frac{1}{\beta_t} (V_t^{(H)} - H_t^{(1)} S_t) r \beta_t dt \\ &= H_t^{(1)} dS_t + r (V_t^{(H)} - S_t H_t^{(1)}) dt, \end{aligned} \quad (2.52)$$

andererseits liefert die Strukturannahme zusammen mit der zeitabhängigen Itô-Formel (Kor. 2.50)

$$dV_t^{(H)} = dv(S_t, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) (S_t, t) dS_t + \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} v \right) (S_t, t) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \right) (S_t, t) \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt, \quad (2.53)$$

d.h. es muss gelten  $H_t^{(1)} = \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) (S_t, t)$

**Beobachtung 2.73.** Sei  $v(x, t)$  für  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$   $z$ -mal stetig in  $x$  und  $1$ -mal stetig in  $t$  differenzierbar und löse

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v + rx \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial t} v - rv = 0 \quad (2.54)$$

(„Black-Scholes(-Merton)-Gleichung“) mit Endbedingung  $v(x, T) = h(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

Dann ist das Portfolio  $H$  mit Wertprozess  $V_t^{(H)} = v(S_t, t)$ ,

$$H_t^{(1)} = \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) (S_t, t), \quad H_t^{(2)} = \frac{1}{\beta_t} (V_t^{(H)} - S_t H_t^{(1)})$$

selbstfinanzierend und dupliziert  $C = h(S_T) = V_T^{(H)}$ , insbesondere ist der faire Preis von  $C$  zur Zeit  $t = 0$  gleich  $V_0^{(H)} = v(S_0, 0)$ .

*Beweis.* Es ist (vgl. auch (2.52), (2.53))

$$\begin{aligned} v(S_T, T) - v(S_0, 0) &= \int_0^T \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) (S_t, t) dS_t}_{=H_t^{(1)}} + \int_0^T \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} v \right) (S_t, t) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \right) (S_t, t) \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2}_{=rv(S_t, t) - rS_t \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) (S_t, t)} dt \\ &= \int_0^T H_t^{(1)} dS_t + \int_0^T \frac{1}{\beta_t} (v(S_t, t) - S_t H_t^{(1)}) r \beta_t dt = \int_0^T H_t^{(1)} dS_t + \int_0^T H_t^{(2)} d\beta_t, \end{aligned}$$

d.h.  $H$  ist selbstfinanzierend. Nach Konstruktion gilt  $V_T^{(H)} = v(S_T, T) = h(S_T)$ . □

**Bericht**  $\frac{\partial}{\partial x}v$  heißt (im Jargon der Finanzmathematik der Derivate) das „Delta“ der Option, man nennt die Strategie aus Beob. 2.73 auch den „ $\Delta$ -hedge“.

**Beobachtung 2.74** (Lösung der BSM-Gleichung via Variablentransformation). Sei  $v$  Lösung der Black-Scholes(-Merton)-Gleichung (2.54) aus Beob. 2.73, setze

$$u(x, t) := e^{\alpha x + \beta t} v(e^x, T - t/\sigma^2), \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, \sigma^2 T] \quad (2.55)$$

mit  $\alpha := \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right)^2$ . Dann löst  $u$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad \text{auf } \mathbb{R} \times [0, \sigma^2 T] \quad \text{mit Startbed. } u(x, 0) = g(x) := e^{\alpha x} h(e^x),$$

demnach ist

$$u(x, t) = \mathbb{E}_x[g(W_t)] = \mathbb{E}[g(x + \sqrt{t}Z)]$$

mit  $(W_t)_t$  standard-BB,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und

$$p(C) = v(S_0, 0) = e^{-\alpha \log(S_0) - \beta \sigma^2 T} u(\log(S_0), \sigma^2 T) = e^{-rT} \mathbb{E}[h(S_0 e^{\sigma \sqrt{T}Z + (r - \sigma^2/2)T})]. \quad (2.56)$$

Insbesondere gilt für den Call mit Ausübungspreis  $K$ , d.h.  $h(x) = (x - K)^+$ , und Laufzeit  $T$

$$p(C) = S_0 e^{-\sigma^2 T/2} \mathbb{E}[e^{\sigma \sqrt{T}Z} \mathbf{1}_A] - K e^{-rT} \mathbb{P}(A) = S_0 \mathbb{P}(Z \leq d_+) - K e^{-rT} \mathbb{P}(Z \leq d_-)$$

mit

$$A = \left\{ S_0 e^{\sigma \sqrt{T}Z + (r - \sigma^2/2)T} \geq K \right\} = \left\{ -Z \leq \left( \log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T \right) / (\sigma \sqrt{T}) \right\}$$

und

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

**Bemerkung.** Die Preisformel (2.56) (und auch die Hedging-Strategie) hängt nicht von  $\mu$  ab – man kann sie als die diskontierte erwartete Auszahlung unter dem sog. „risikoneutralen Maß“ auffassen (d.h. so tun, als ob  $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$  gälte).

Die entscheidenden Größen sind (nur) die Volatilität  $\sigma$  und die Zinsrate  $r$ .

*Beweisskizze für Beob. 2.74.* Zur Formel für  $u(x, t) = \mathbb{E}_x[g(W_t)]$ :

Man kann anhand der Gleichung (2.54) für  $v$  und der Definition (2.55),  $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(e^x, T - t/\sigma^2)$  direkt nachrechnen, dass  $u$  die Wärmeleitungsgleichung mit Startbedingung  $g$  löst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= e^{\alpha x + \beta t} \left( \beta v(e^x, T - t/\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= e^{\alpha x + \beta t} \left( \alpha v(e^x, T - t/\sigma^2) + e^x \frac{\partial}{\partial x} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= e^{\alpha x + \beta t} \left( \alpha^2 v(e^x, T - t/\sigma^2) + (2\alpha + 1) e^x \frac{\partial}{\partial x} v(e^x, T - t/\sigma^2) + e^{2x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right), \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\
&= e^{\alpha x + \beta t} \left( \left( \beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) v(e^x, T - t/\sigma^2) - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) e^x \frac{\partial}{\partial x} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (e^x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(e^x, T - t/\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right) \\
&= \frac{e^{\alpha x + \beta t}}{\sigma^2} \left( \underbrace{\sigma^2 \left( \beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)}_{=r} v(e^x, T - t/\sigma^2) - \underbrace{\sigma^2 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)}_{=r} e^x \frac{\partial}{\partial x} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right. \\
&\quad \left. - \sigma^2 (e^x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(e^x, T - t/\sigma^2) - \frac{\partial}{\partial t} v(e^x, T - t/\sigma^2) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin kann man explizit nachrechnen, dass

$$(x, t) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(y+x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/(2t)} dy$$

(mit  $((x, 0) \mapsto g(x))$  dieselbe Gleichung löst (Übung); die Behauptung ergibt sich mit der aus der Analysis bekannten Tatsache, dass das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung eindeutig lösbar ist.

Alternativ beachte:

$$M_s := u(W_s + x, t - s), \quad 0 \leq s \leq t$$

ist ein lokales Martingal (mit Itô-Formel unter Beachtung von (2.54) für  $v$  und der Definition von  $u$ , wie oben) und  $|u(x, t)| \leq e^{c|x|}$  für ein  $c < \infty$  (verwende dazu etwa die Darstellung  $u(x, t) = \mathbb{E}_x[g(W_t)]$ ) und die Wachstumsbedingung an  $h$ , also  $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |M_s|] < \infty$  und  $(M_s)_{0 \leq s \leq t}$  ist somit tatsächlich ein Martingal, daher ist

$$u(x, t) = M_0 = \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[u(W_t + x, 0)] = \mathbb{E}_x[g(W_t)].$$

Für die Preisformel (2.56) beachte

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha \log(S_0) - \beta \sigma^2 T} u(\log(S_0), \sigma^2 T) &= e^{-\beta \sigma^2 T} \mathbb{E} \left[ e^{-\alpha \log S_0} g(\log(S_0) + \sigma \sqrt{T} Z) \right] \\
&= e^{-\beta \sigma^2 T} \mathbb{E} \left[ e^{\alpha \sigma \sqrt{T} Z} h(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z}) \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ h(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z + (r - \sigma^2/2)T}) \right]
\end{aligned}$$

denn für  $a, b \geq 0$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  m.b. gilt stets

$$\mathbb{E}[e^{aZ} f(bZ)] = e^{a^2/2} \mathbb{E}[f(bZ + ab)] \quad (2.57)$$

(quadr. Ergänzung im Gaußintegral), wende dies an mit  $a = \alpha \sigma \sqrt{T}$ ,  $b = \sigma \sqrt{T}$  und beachte, dass  $-\beta \sigma^2 T + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 T = -rT$ .

Die Formel für den Preis des Calls folgt aus (2.56) durch explizite Rechnung (unter Ausnutzung von (2.57): In diesem Fall ist  $h(x) = (x - K)^+ = x \mathbf{1}_{\{x \geq K\}} - K \mathbf{1}_{\{x \geq K\}}$ , somit

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \mathbb{E} \left[ h(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z + (r - \sigma^2/2)T}) \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z + (r - \sigma^2/2)T} \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z + (r - \sigma^2/2)T} \geq K\}} \right] - e^{-rT} K \mathbb{P}(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z + (r - \sigma^2/2)T} \geq K) \\ &= S_0 e^{-\sigma^2 T/2} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma \sqrt{T} Z} \mathbf{1}_A \right] - K e^{-rT} \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Da  $Z$  symmetrisch verteilt ist, ist  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Z \leq d_-)$ , mit (2.57) (angewendet mit  $a = \sigma \sqrt{T}$ ,  $b = 1$ ) ist

$$\begin{aligned} S_0 e^{-\sigma^2 T/2} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma \sqrt{T} Z} \mathbf{1}_A \right] &= S_0 \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma \sqrt{T}(Z + \sigma \sqrt{T}) + (r - \sigma^2/2)T} \geq K\}} \right] \\ &= S_0 \mathbb{P} \left( -Z \leq \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right) = S_0 \mathbb{P}(Z \leq d_+). \end{aligned}$$

□

## 2.8 Maßwechsel und Girsanov<sup>IO</sup>-Transformation

**Vorbemerkung** Begriffe der stochastischen Analysis hängen a priori vom zugrunde liegenden Maß  $\mathbb{P}$  ab (speziell von seiner Nullmengenstruktur) und bei Übergang zu einem anderem Maß  $\mathbb{Q}$  mit  $\mathbb{Q} \perp \mathbb{P}$  könnten sie sich fundamental ändern – z.B. könnte die quadratische Variation  $\langle X \rangle$  von  $X$  unter  $\mathbb{Q}$  ein anderer Prozess sein.

Wir gewinnen in diesem Abschnitt eine Übersicht, wenn  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  äquivalent sind.

**Lemma 2.75.**  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  filtrierter  $W$ -raum, der den üblichen Bedingungen genügt (vgl. Def. 2.2),  $\mathbb{Q}$  ein zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes  $W$ -maß d.h.  $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ , insbesondere gibt es eine Dichte  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  und  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathbf{1}_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right]$  nach Satz von Radon-Nikodým (z.B. [Kl, Kor. 7.34]).

Dann gibt es ein gleichgradig integrierbares càdlàg  $(\mathbb{P}-)$ Martingal  $(Z_t)_{t \geq 0}$  mit

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{d.h. } \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathbf{1}_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathbf{1}_A Z_t \right] \text{ für } A \in \mathcal{F}_t) \quad (2.58)$$

und

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0 : Z_t > 0 \text{ und } Z_{t-} > 0) = 1 \quad (2.59)$$

(mit  $Z_{t-} := \lim_{s \nearrow t, s < t} Z_s$ ).

*Beweis.* Sei  $Z_\infty := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ ,

$$\tilde{Z}_t := \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ Z_\infty \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

<sup>10</sup>Nach Igor Vladimirovich Girsanov, 1934–1967

$(\tilde{Z}_t)$  ist gleichgradig integrierbares ( $\mathbb{P}$ -)Martingal (für die Martingaleigenschaft verwende die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung; für gleichgradige Integrierbarkeit beachte, dass  $(\tilde{Z}_t)$  ein Doob'sches Martingal ist, vgl. [Kl, Kor. 8.21]),

demnach gibt es eine càdlàg-Modifikation  $(Z_t)_{t \geq 0}$  (d.h.  $(Z_t)$  hat càdlàg-Pfade und  $\mathbb{P}(Z_t = \tilde{Z}_t) = 1$  für alle  $t \geq 0$ ; vgl. Beweis von Satz 2.9 oder [Kl, Satz 21.24], [RY, Kap. II, Thm. 2.9]).

Für  $t \geq 0$ ,  $A \in \mathcal{F}_t$  ist

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \tilde{Z}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\underbrace{\mathbf{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_\infty | \mathcal{F}_t]}_{=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z_\infty | \mathcal{F}_t]}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z_\infty] = \mathbb{Q}(A),$$

d.h. (2.58) gilt.

Sei  $T := \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0 \text{ oder } Z_{t-} = 0\}$ ,  $T$  ist Stoppzeit, zeige

$$\mathbb{P}(Z_t = 0 \quad \forall t \in [T, \infty)) = 1. \quad (2.60)$$

(Ein nicht-negatives Martingal, das 0 getroffen hat, bleibt ab dann  $\equiv 0$ .)

Sei  $T_\varepsilon := \inf\{t : Z_t \leq \varepsilon\} \nearrow_{\varepsilon \downarrow 0} T$ , es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_t > \sqrt{\varepsilon}, t \geq T_\varepsilon) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\{t \geq T_\varepsilon\}} \underbrace{\mathbb{P}(Z_{t \vee T_\varepsilon} > \sqrt{\varepsilon} | \mathcal{F}_{T_\varepsilon})}_{\leq \varepsilon^{-1/2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t \vee T_\varepsilon} | \mathcal{F}_{T_\varepsilon}]} \right] \leq \sqrt{\varepsilon} \\ &\leq \varepsilon^{-1/2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t \vee T_\varepsilon} | \mathcal{F}_{T_\varepsilon}] = \varepsilon^{-1/2} Z_{T_\varepsilon} \leq \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

(Markov-Ungl. und optional sampling) mit  $\varepsilon \downarrow 0$  also

$$\mathbb{P}(Z_t > 0, t \geq T) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z_t = 0 \quad \forall t \in [T, \infty) \cap \mathbb{Q}) = 1,$$

da  $(Z_t)$  càdlàg-Pfade besitzt, folgt (2.60).

Schließlich

$$0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{Z_t=0\}} Z_t] = \mathbb{Q}(Z_t = 0) \stackrel{\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}}{=} \mathbb{P}(Z_t = 0) \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

also  $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$ , d.h. (2.59) gilt. □

**Annahme 2.76.**  $(Z_t)_{t \geq 0}$  aus (2.58) in Lemma 2.75 habe (f.s.) stetige Pfade. (Dies ist eine Voraussetzung an  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  – wir werden sehen, dass dies z.B. im „Brownschen Fall“ typischerweise erfüllt ist.)

Setze

$$X_t := \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s, \quad t \geq 0, \quad (2.61)$$

dann ist  $(X_t)$  ein lokales Martingal (bzgl.  $\mathbb{P}$ ) und

$$Z_t = Z_0 \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t\right) \quad (2.62)$$

(d.h.  $Z$  ist das Doléans-Exponential von  $X$ , vgl. Beob. 2.51, denn  $dX_t = \frac{1}{Z_t} dZ_t$ , also  $dZ_t = Z_t dX_t$ ).

**Bemerkung 2.77.** 1. (Eine „Umkehrung“ von Lemma 2.75: Vom nicht-neg. Martingal zum (lokal) äquivalenten Maß) Sei  $(Z_t)_{t \geq 0}$  strikt positives ( $\mathbb{P}$ -)Martingal, dann definiert

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z_t], \quad A \in \mathcal{F}_t$$

ein  $W^3$ maß auf  $\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  ( $\mathbb{Q}$  ist wohldefiniert, vgl. Beweis von Lemma 2.75) mit  $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$ . Allerdings ist dieses  $\mathbb{Q}$  nur dann äquivalent zu  $\mathbb{P}$  auf  $\tilde{\mathcal{A}}$ , wenn  $(Z_t)$  gleichgradig integrierbar (unter  $\mathbb{P}$ ) ist mit  $\mathbb{P}(Z_\infty > 0) = 1$ . (Im allgemeinen Fall ist  $\mathbb{Q}$  nur lokal äquivalent zu  $\mathbb{P}$ , d.h.  $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} \ll \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$  und  $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} \ll \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$  für jedes  $t \geq 0$ .)

2. Wenn für ein vorgegebenes ( $\mathbb{P}$ -)Semimartingal  $X$  durch (2.62) mit  $Z_0 := 1$  ein ( $\mathbb{P}$ -)Martingal definiert ist und nicht „nur“ ein lokales Martingal, so können wir wie in 1. ein  $W^3$ maß  $\mathbb{Q}$  definieren. (Eine hinreichende Bed. dafür haben wir in Übung 7.1 gesehen:  $X$  lokales Mart. mit  $\langle X \rangle_t \leq ct$  für ein  $c < \infty$ , so ist [via eine Version der Bernstein-Ungleichung] insbesondere  $Z$  ein Martingal.)

**Bericht** Angesichts Bem. 2.77, 1. liegt die Frage nahe, unter welchen Bedingungen an ein stetiges lokales Martingal  $X$  durch (2.62) ein gleichgradig integrierbares Martingal definiert ist. Bekannte dafür hinreichende Bedingungen sind

1.  $(e^{X_t/2})_{t \geq 0}$  ist ein gleichgradig integrierbares Submartingal (Kazamaki-Bedingung),
2.  $\mathbb{E}[e^{\langle X \rangle_\infty / 2}] < \infty$  (Novikov-Bedingung).

**Satz 2.78** (Girsanov-Transformation<sup>11</sup>). Seien  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  wie in Lemma 2.75,  $X$  wie in (2.61), es gelte Ann. 2.76.

1. Sei  $(M_t)_{t \geq 0}$  stetiges lokales Martingal (bzgl.  $\mathbb{P}$ ), dann ist

$$\widetilde{M}_t := M_t - \langle M, X \rangle_t, \quad t \geq 0$$

ein stetiges lokales Martingal bzgl.  $\mathbb{Q}$ .  $\widetilde{M}$  heißt die Girsanov-Transformierte von  $M$ .

(Demnach: Man muss (die Drift) mit der Kovariation von  $M$  und dem „Doléans-Logarithmus“  $X$  des Dichteprozesses korrigieren.)

2.  $M, N$  stetige lokale Martingale (bzgl.  $\mathbb{P}$ ),  $\widetilde{M}, \widetilde{N}$  zugehörige Girsanov-Transformierte, dann gilt

$$\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle_t^{\mathbb{Q}} = \langle M, N \rangle_t^{\mathbb{P}}, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. und } \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

<sup>11</sup>Igor Vladimirovich Girsanov, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theor. Probab. Appl.* 5 (1960), 285-301 (1962); translation from *Teor. Veroyatn. Primen.* 5, 314-330 (1960).

Vorarbeiten (für den Brownschen Fall) in Robert Horton Cameron and William Ted Martin, Transformations of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.* 45 (1944), 386-396, die hier formulierte allgemeine Form erschien in Jan H. Van Schuppen, Eugene Wong, Transformation of local martingales under a change of law, *Ann. Probability* 2 (1974), 879-888.

*Beweis.* Sei o.E.  $M_0 = 0$ .

1. : Zeige  $(\widetilde{M}_t Z_t)_{t \geq 0}$  ist lokales Martingal bezgl.  $\mathbb{P}$ .

$$\widetilde{M}_t Z_t \stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} \int_0^t \widetilde{M}_s dZ_s + \int_0^t Z_s \underbrace{d\widetilde{M}_s}_{=dM_s - d\langle M, X \rangle_s} + \langle \widetilde{M}, Z \rangle_t = \int_0^t \widetilde{M}_s dZ_s + \int_0^t Z_s dM_s,$$

wobei wir verwenden, dass

$$\langle \widetilde{M}, Z \rangle_t = \langle M - \langle M, X \rangle, Z \rangle_t = \langle M, Z \rangle_t = \int_0^t Z_s d\langle M, X \rangle_s$$

(denn  $dZ_s = Z_s dX_s$ , vgl. (2.62); verwende Prop. 2.38).

Sei

$$\begin{aligned} T_n &:= \inf \{t : |\widetilde{M}_t| \geq n\}, \\ S_m &:= \inf \{t : |X_t| \geq m \text{ oder } \langle X \rangle_t \geq m\}, \end{aligned}$$

es gilt  $T_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ ,  $S_m \nearrow_{m \rightarrow \infty} \infty$  (wegen Pfadstetigkeit).

Obige Rechnung (angewendet auf  $X^{S_m} := (X_{t \wedge S_m})_{t \geq 0}$ ,  $Z^{S_m} := (Z_{t \wedge S_m})_{t \geq 0}$ ,  $\widetilde{M}^{S_m \wedge T_n} := (\widetilde{M}_{t \wedge S_m \wedge T_n})_{t \geq 0}$ ) zeigt:

$$(\widetilde{M}_{t \wedge S_m \wedge T_n} Z_{t \wedge S_m})_{t \geq 0} \text{ ist lokales Martingal,}$$

ist nach Konstruktion beschränkt  $\Rightarrow$  ist Martingal.

Demnach für  $s \leq t$ ,  $A \in \mathcal{F}_s$ :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{t \wedge S_m \wedge T_n} Z_{t \wedge S_m}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{s \wedge S_m \wedge T_n} Z_{s \wedge S_m}]$$

mit  $m \rightarrow \infty$  folgt (da  $\widetilde{M}_{\cdot \wedge T_n}$  beschränkt und  $Z_{t \wedge S_m} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} Z_t$  in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  wg. gleichgr. Int.bark. von  $Z$ )

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{t \wedge T_n}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{t \wedge T_n} Z_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{s \wedge T_n} Z_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A \widetilde{M}_{s \wedge T_n}], \quad (2.63)$$

d.h.  $(\widetilde{M}_{t \wedge T_n})_t$  ist  $\mathbb{Q}$ -Martingal.

2. Sei

$$I_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t = 2 \int_0^t M_s dM_s, \quad t \geq 0$$

(wobei  $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle^{\mathbb{P}}$ ), dann ist

$$\widetilde{I}_t = I_t - \langle I, X \rangle_t \stackrel{\text{Prop. 2.38}}{=} M_t^2 - \langle M \rangle_t - 2 \int_0^t M_s d\langle M, X \rangle_s$$

ein lokales  $\mathbb{Q}$ -Martingal (nach Teil 1.),

$$\begin{aligned} (\widetilde{M}_t)^2 - \langle M \rangle_t &= M_t^2 - 2M_t \langle M, X \rangle_t + (\langle M, X \rangle_t)^2 - \langle M \rangle_t \\ &= \widetilde{I}_t + (\langle M, X \rangle_t)^2 + 2 \int_0^t M_s d\langle M, X \rangle_s - 2M_t \langle M, X \rangle_t. \end{aligned}$$

$$J_t := 2M_t \langle M, X \rangle_t - 2 \int_0^t M_s d \langle M, X \rangle_s \stackrel{\text{It\^o-Formel / part. Int.}}{=} 2 \int_0^t \langle M, X \rangle_s dM_s,$$

also ist

$$\tilde{J}_t := J_t - \langle J, X \rangle_t = J_t - 2 \int_0^t \langle M, X \rangle_s d \langle M, X \rangle_s = J_t - (\langle M, X \rangle_t)^2$$

auch ein lokales  $\mathbb{Q}$ -Martingal (nach Teil i.) und somit

$$(\tilde{M}_t)^2 - \langle M \rangle_t = \tilde{I}_t - \tilde{J}_t \quad \text{ein lokales } \mathbb{Q}\text{-Martingal,}$$

d.h.  $\langle \tilde{M} \rangle_t^{\mathbb{Q}} = \langle M \rangle_t^{\mathbb{P}}$ .

Der allgemeine Fall folgt durch Polarisierung. □

**Korollar 2.79.**  $Y = (Y_t)_t$  Semimartingal unter  $\mathbb{P}$  mit kanonischer Zerlegung  $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$  ( $(M_t)$  lokales  $\mathbb{P}$ -Martingal,  $(A_t)$  mit Pfaden von lokal endlicher Variation),  $\mathbb{Q}$  äquivalent zu  $\mathbb{P}$ , so ist  $Y$  auch ein Semimartingal unter  $\mathbb{Q}$ :

$$Y_t = Y_0 + \tilde{M}_t + (A_t + \langle M, X \rangle_t) = Y_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t.$$

**Korollar 2.80** (Der Brownsche Fall). Sei  $M$  Brownsche Bewegung (bzgl.  $\mathbb{P}$ ), das zum Dichteprozess  $(Z_t)_t$  (aus (2.58) in Lemma 2.75) gehörige lokale Martingal  $(X_t)_t$  (vgl. (2.61)) besitze eine Darstellung

$$X_t = \int_0^t a_s dM_s$$

mit einem lokal beschränkten, progressiv messbaren Prozess  $(a_t)_t$ .

Dann ist  $M$  unter  $\mathbb{Q}$  eine Brownbewegung mit (zufälliger) Drift  $a_t$ , d.h.

$$M_t = \tilde{M}_t + \int_0^t a_s ds,$$

wo  $\tilde{M}$  Brownbewegung bezgl.  $\mathbb{Q}$ .

*Beweis.*

$$\tilde{M}_t = M_t - \langle M, X \rangle_t = M_t - \langle M, \int_0^t a_s dM_s \rangle_t = M_t - \int_0^t a_s ds$$

(denn  $\langle M \rangle_s = s$  in diesem Fall) ist lokales  $\mathbb{Q}$ -Martingal und  $\langle \tilde{M} \rangle_t = \langle M \rangle_t = t$  (nach Satz 2.78).

Mit Lévy's Charakterisierung der BB (Satz 2.54) folgt

$$\tilde{M} \text{ ist Brownbewegung bezgl. } \mathbb{Q}. \quad \square$$

**Beispiel 2.81.** 1. Mit  $a_s \equiv \mu$  für ein  $\mu \in \mathbb{R}$  in Kor. 2.80 ist  $X_t = \mu M_t$ ,  $Z_t = e^{\mu M_t - \mu^2 t/2}$  (dies ist etwa gem. Bem. 2.77, 2. ein „richtiges“ Martingal) und Kor. 2.80 zeigt:

$$(M_t) \quad \text{ist unter } \mathbb{Q} \text{ BB mit Drift } \mu.$$

2. Sei  $a_s := -cM_s$  mit einem  $c > 0$ , so ist in Kor. 2.80  $X_t = -c \int_0^t M_s dM_s = -\frac{c}{2}M_t^2 + \frac{c}{2}t$  (Itô-Formel und  $M_0 = 0$ ) und  $\langle X \rangle_t = c^2 \int_0^t M_s^2 ds$ ,  $Z_t = \exp\left(\frac{1}{2}(-cM_t^2 + ct - c^2 \int_0^t M_s^2 ds)\right)$  ( $0 \leq Z_t \leq e^{cT/2}$  für jedes  $t \leq T$ , daher ist es ein Martingal), Kor. 2.80 zeigt:

$$(M_t) \quad \text{erfüllt unter } \mathbb{Q} \quad M_t = M_0 - c \int_0^t M_s ds + \tilde{M}_t, \quad t \geq 0$$

mit  $\tilde{M}$  BB (d.h.  $M$  ist unter  $\mathbb{Q}$  ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess).

# Kapitel 3

## Stochastische Differentialgleichungen

**Vorbemerkung** (Diffusionsprozesse als „stochastisches Analogon“ zu gewöhnlichen Differentialgleichungen). Seien  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (mit geeign. Bedingungen), gesucht:

Stetiger stochastischer Prozess  $(X_t)$ , so dass

$$\text{gegeben } X_t = x \text{ gilt } X_{t+h} - x \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(hb(x), h\sigma^2(x)) \quad \text{für } 0 < h \ll 1,$$

d.h.  $(X_t)$  sieht „lokal“ aus wie eine BB mit Drift  $b(x)$  und Varianz  $\sigma^2(x)$ , suggestiv schreibt man

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t. \quad (3.1)$$

(Wir haben diese Frage von einem „praktischen Standpunkt“ bereits im Stochastik-Praktikum betrachtet und sie dort mittels Euler(-Maruyama)-Verfahren gelöst)

**„Zutaten“**  $d, m \in \mathbb{N}$ ,  $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$  messbar, wir schreiben  $b_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, d$  für die  $i$ -te Koordinate von  $b$  und  $\sigma_{ij}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, d$ ;  $j = 1, \dots, m$  für den Eintrag in Zeile  $i$ , Spalte  $j$  von  $\sigma$ ,

$$B = (B^{(1)}, \dots, B^{(m)}) \text{ } m\text{-dim. (std.-)BB, } x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ (Startpunkt)}$$

Für  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$  betrachten wir die *stochastische Differentialgleichung* (SDgl, engl. SDE=stochastic differential equation)

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \quad (3.2)$$

(mit Startwert  $X_0 = x_0$ , für die einzelnen Koordinatenprozesse lautet (3.2)

$$dX_t^{(i)} = b_i(X_t, t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(X_t, t) dB_t^{(j)}$$

für  $i = 1, 2, \dots, d$ ).

Für  $b \in \mathbb{R}^d$  verwenden wir die euklidische Norm  $\|b\| = (b_1^2 + \dots + b_d^2)^{1/2}$ , für  $A \in \mathbb{R}^{d \times m}$  die Hilbert-Schmidt-Norm

$$\|A\| = (\text{Spur}(AA^T))^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^d (AA^T)_{i,i} \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m A_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

**Definition 3.1.**  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  filtrierter  $W$ -raum, der den üblichen Bedingungen genügt (vgl. Def. 2.2), darauf  $(B_t)$   $m$ -dim. BB,  $\mathcal{F}_t^B$  sei die  $\mathbb{P}$ -Vervollständigung von  $\sigma(B_s, s \leq t)$  (d.h.  $\mathcal{F}_t^B = \{A \in \mathcal{A} : \exists B \in \sigma(B_s, s \leq t) \text{ mit } \mathbb{P}(A \Delta B) = 0\}$ , vgl. Beispiel 2.3), weiter seien  $b, \sigma$  wie oben.

Ein stetiger ( $d$ -dim.) Prozess  $(X_t)$  ist eine *starke Lösung* der SDGl (3.2) (mit Startpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ), falls gilt

1.  $\int_0^t \|b(X_s, s)\| ds + \int_0^t \|\sigma(X_s, s)\|^2 ds < \infty, \quad t \geq 0 \text{ f.s.},$
2.  $X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dB_s, \quad t \geq 0 \text{ f.s.}$   
(d.h. in Koordinaten geschrieben  $X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t b_i(X_s, s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(X_s, s) dB_s^{(j)}$ ),
3.  $X$  ist  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ -adaptiert.

**Bem.** Forderung 3. macht das „stark“ aus: die vorgegebene BB wird als Teil der „Daten“ aufgefasst.

Wir werden (später) auch „schwache“ Lösungen betrachten, wo u.U. die Konstruktion der „treibenden“ BB ein Teil der Lösung ist.

**Beispiel 3.2.** Die SDGl. (in  $d = 1$ , mit  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ )

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

besitzt die Lösung

$$X_t = x_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right),$$

d.h.  $(X_t)$  ist eine geometrische BB (vgl. auch Kap. 2.7), wie man leicht mittels Itô-Formel prüft.

**Satz 3.3.** Angenommen,  $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\sigma : \mathbb{R}^{d \times m} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$  erfüllen die

1. *Lipschitz-Bedingung*

$$\|b(y, t) - b(z, t)\| + \|\sigma(y, t) - \sigma(z, t)\| \leq K \|y - z\|, \quad y, z \in \mathbb{R}^d, t \geq 0 \quad \text{und die} \quad (3.3)$$

2. *Wachstums-Bedingung*

$$\|b(y, t)\|^2 + \|\sigma(y, t)\|^2 \leq K(1 + \|y\|^2), \quad y \in \mathbb{R}^d, t \geq 0 \quad (3.4)$$

für ein  $K < \infty$ ,  $(B_t)$  sei  $m$ -dim. BB auf einem gegebenen filtrierten  $W$ -raum (der den üblichen Bedingungen genügt),  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Dann gibt es eine (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige starke Lösung  $X$  der SDGl. (3.2).

**Lemma 3.4.**  $H(t) = (H_{ij}(t))_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, m}$  progressiv messbarer,  $\mathbb{R}^{d \times m}$ -wertiger Prozess mit  $\mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(s)\|^2 ds\right] < \infty$ ,  $(B_t)$   $m$ -dim. BB. Dann ist

$$\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t H(s) dB_s\right\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|H(s)\|^2 ds\right]. \quad (3.5)$$

*Beweis.*

$$I_i(t) := \sum_{j=1}^m \int_0^t H_{ij}(s) dB_s^{(j)}$$

ist stetiges Martingal mit

$$\langle I_i \rangle_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t H_{ij}^2(s) ds, \quad i = 1, \dots, d,$$

also

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t \|H(s)\|^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t H_{ij}^2(s) ds \right] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E} [I_i(t)^2] = \mathbb{E} \left[ \left\| \int_0^t H(s) dB_s \right\|^2 \right]. \quad (3.6)$$

□

**Lemma 3.5** (Gronwall'-Ungleichung / Gronwall-Lemma). *Seien  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar,  $C > 0$ , es gelte*

$$f(t) \leq g(t) + C \int_0^t f(s) ds \quad \text{für } t \in [0, T].$$

*Dann ist*

$$f(t) \leq g(t) + C \int_0^t e^{C(t-s)} g(s) ds \quad \text{für } t \in [0, T],$$

*insbesondere falls  $g(t) \equiv \bar{g}$ , so ist  $f(t) \leq \bar{g}e^{Ct}$ .*

*Beweis.* Sei

$$F(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad h(t) := F(t)e^{-Ct},$$

also

$$\frac{d}{dt} h(t) = f(t)e^{-Ct} - CF(t)e^{-Ct} \leq g(t)e^{-Ct}$$

und

$$F(t) = e^{Ct} h(t) = e^{Ct} \int_0^t \frac{d}{ds} h(s) ds \leq \int_0^t e^{C(t-s)} g(s) ds.$$

Nach Vor. ist

$$f(t) \leq g(t) + CF(t) \leq g(t) + C \int_0^t e^{C(t-s)} g(s) ds.$$

□

*Beweis von Satz 3.3.* Es genügt, für jedes  $0 < T < \infty$  zu zeigen, dass es eine eindeutige starke Lösung auf  $[0, T]$  gibt.

---

<sup>1</sup>Thomas Hakon Grönwall, 1877–1932; Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math. (2) 20 (1919), no. 4, 292–296.

**Eindeutigkeit** Seien  $X$  und  $X'$  Lösungen von (3.2). Dann ist

$$X_t - X'_t = \int_0^t (b(X_s, s) - b(X'_s, s)) ds + \int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s)) dB_s,$$

somit

$$\|X_t - X'_t\|^2 \leq 2 \left\| \int_0^t (b(X_s, s) - b(X'_s, s)) ds \right\|^2 + 2 \left\| \int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s)) dB_s \right\|^2.$$

Daher ist (verwende Cauchy-Schwarz für den ersten Summanden und Lemma 3.4 für den zweiten Summanden auf der rechten Seite)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|X_t - X'_t\|^2] &\leq 2t \int_0^t \mathbb{E}[\|b(X_s, s) - b(X'_s, s)\|^2] ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \mathbb{E}[\|\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s)\|^2] ds, \end{aligned}$$

demnach erfüllt  $f(t) := \mathbb{E}[\|X_t - X'_t\|^2]$

$$f(t) \leq C \int_0^t f(s) ds \quad \text{mit } C := (2T + 1)K^2.$$

Mit Lemma von Gronwall (Lemma 3.5) folgt  $f(t) = 0$ .

**Existenz** Wir verwenden (eine Variation über) Picard-Iteration: Sei  $X_t^0 \equiv x_0$  und

$$X_t^N := x_0 + \int_0^t b(X_s^{N-1}, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{N-1}, s) dB_s, \quad t \geq 0, \quad \text{für } N \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Die Wachstumsbedingung (3.4) sichert

$$\int_0^T \mathbb{E}[\|X_t^N\|^2] dt \leq 2(T+1)K \left( T + \int_0^T \mathbb{E}[\|X_t^{N-1}\|^2] dt \right) \leq \dots \leq (2T(T+1)K)^N (1 + \|x_0\|^2),$$

insbes. ist das Itô-Integral in (3.7) wohldefiniert.

Schreibe

$$X_t^{N+1} - X_t^N = I_t + J_t$$

mit

$$I_t := \int_0^t \sigma(X_s^N, s) - \sigma(X_s^{N-1}, s) dB_s$$

und

$$J_t := \int_0^t b(X_s^N, s) - b(X_s^{N-1}, s) ds.$$

$(\|I_t\|^2)_{t \geq 0}$  ist nicht-neg. Submartingal, mit Doob-Ungl. ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \|I_s\|^2 \right] &\leq 4\mathbb{E}[\|I_t\|^2] \\ &= 4\mathbb{E} \left[ \int_0^t \|\sigma(X_s^N, s) - \sigma(X_s^{N-1}, s)\|^2 ds \right] \quad (\text{nach Lemma 3.4}) \\ &\leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2] ds \quad (\text{wegen der Lipschitz-Bedingung (3.3)}). \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\|J_t\|^2 \leq t \int_0^t \|b(X_s^N, s) - b(X_s^{N-1}, s)\|^2 ds,$$

also

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \|J_s\|^2 \right] &\leq t\mathbb{E} \left[ \int_0^t \|b(X_s^N, s) - b(X_s^{N-1}, s)\|^2 ds \right] \\ &\leq tK^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2] ds \quad (\text{wegen der Lipschitz-Bedingung (3.3)}). \end{aligned}$$

Demnach erfüllt

$$\begin{aligned} \Delta^N(t) &:= \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2 \right] \\ \Delta^{N+1}(t) &\leq C \int_0^t \Delta^N(s) ds, \quad N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

mit  $C := 2K^2(4+T) \vee 2(T+1)K^2(1+\|x_0\|^2)$  und

$$\begin{aligned} \Delta^1(t) &\leq 2t \int_0^t \|b(x_0, s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|\sigma(x_0, s)\|^2 ds \\ &\leq 2(T+1)K(1+\|x_0\|^2) \cdot t \leq Ct \quad (\text{wegen der Wachstums-Bedingung (3.4)}). \end{aligned}$$

Induktiv folgt

$$\Delta^N(t) \leq \frac{(Ct)^N}{N!}.$$

Mit Markov-Ungleichung folgt

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \sup_{s \leq t} \|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2 > 2^{-N} \right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} 2^N \Delta^N(t) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(2Ct)^N}{N!} = e^{2Ct} - 1 < \infty,$$

mit Borel-Cantelli also

$$\sup_{M, N \geq N_0} \sup_{s \leq t} \|X_s^N - X_s^M\|^2 \xrightarrow{N_0 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.},$$

d.h.  $(X^N, N \in \mathbb{N})$  bildet (f.s.) eine Cauchy-Folge in  $C([0, t])$  (bezüglich Sup-Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$ ). Somit konvergiert  $X^N$  (f.s.) gleichmäßig gegen ein stetiges  $X$  (das an  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$  adaptiert ist, denn dies gilt für jedes  $X^N$ ), die gleichmäßige Konvergenz impliziert auch die Konvergenz der stochastischen Integrale (vgl. Satz 2.42; gehe ggfs. zu einer Teilfolge über, um f.s. lokal gleichmäßige Konvergenz zu erhalten), somit ist  $X$  eine starke Lösung von (3.2).  $\square$

**Beispiel 3.6** (Tanakas<sup>2</sup> SDGI). Die SDGI (in  $d = 1$ )

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t) dB_t, \quad X_0 = 0, \quad (3.8)$$

wobei  $B$  std-BB und  $\operatorname{sgn}(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x)$  besitzt keine starke Lösung.

*Beweis.* Ang.,  $X$  wäre eine starke Lösung, insbes. adaptiert an  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ .

$$X_t = 0 + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dB_s$$

ist stetiges (lokales) Martingal mit

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t (\operatorname{sgn}(X_s))^2 ds = \int_0^t 1 ds = t,$$

d.h.  $X$  ist Brownsche Bewegung bezüglich der von  $X$  erzeugten Filtration  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$  gem. Lévy's Charakterisierung der BB (Satz 2.54).

Andererseits ist

$$B_t = \int_0^t (\operatorname{sgn}(X_s))^2 dB_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s, \quad t \geq 0,$$

wir werden sehen (vgl. Beobachtung 3.11 unten):

$$\left( \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s \right)_{t \geq 0} \text{ ist } (\mathcal{F}_t^{|X|})_{t \geq 0}\text{-adaptiert.}$$

Somit für  $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^{|X|} \not\subseteq \mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B,$$

was einen Widerspruch ergibt. □

**Definition 3.7.** Eine *schwache Lösung* der SDGI

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \quad (3.9)$$

(mit Startwert  $X_0 = x_0$ ,  $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : \mathbb{R}^{d \times m} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$  messbar) ist ein filtrierter  $W$ -raum  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  (der den üblichen Bedingungen genügt), ausgestattet mit einer  $((\mathcal{F}_t)$ -)Brownbewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  und einem stetigen, adaptierten Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , so dass gilt

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dB_s, \quad t \geq 0 \quad \text{f.s.} \quad (3.10)$$

(Intuitiv: eine schwache Lösung ist (die Verteilung eines) Paares  $(X, B)$ , das zusammen (3.10) erfüllt.)

**Beobachtung 3.8.** *Tanakas SDGI (3.8) (aus Bsp. 3.6) besitzt eine schwache Lösung.*

<sup>2</sup>Hiroshi Tanaka

*Beweis.* Betrachte einen filtrierten W'raum, auf dem eine 1-dim. Std.-BB  $(X_t)_{t \geq 0}$  definiert ist, setze

$$B_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s, \quad t \geq 0.$$

$B$  ist stetiges lokales Martingal mit

$$\langle B \rangle_t = \int_0^t \underbrace{(\operatorname{sgn}(X_s))^2}_{=1} d\langle X \rangle_s = t,$$

d.h.  $B$  ist BB (gem. Lévy's Charakterisierung der BB (Satz 2.54) und

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dB_s = \int_0^t (\operatorname{sgn}(X_s))^2 dX_s = \int_0^t 1 dX_s = X_t - X_0 = X_t,$$

somit löst  $(X, B)$  Tanakas SDGL. □

**Satz 3.9** ((Itô-)Tanaka-Formel).  $X$  stetiges Semimartingal. Es gibt einen stetigen, adaptierten Prozess  $(\ell_t)_{t \geq 0}$  mit nicht-fallenden Pfaden, so dass gilt

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s + \ell_t, \quad t \geq 0. \quad (3.11)$$

$(\ell_t)_{t \geq 0}$  heißt die (Semimartingal-)Lokalzeit von  $X$  in 0 und es gilt

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \neq 0\}} d\ell_s = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.12)$$

d.h.  $(\ell_t)$  wächst nur auf  $\{t : X_t = 0\}$ .

**Korollar 3.10.** Für ein stetiges Semimartingal  $X$  ist

$$\begin{aligned} X_t^+ &= X_0^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s + \frac{1}{2} \ell_t, \\ X_t^- &= X_0^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq 0\}} dX_s + \frac{1}{2} \ell_t, \end{aligned}$$

denn  $X_t^+ = \frac{1}{2}(|X_t| + X_t)$ ,  $X_t^- = \frac{1}{2}(|X_t| - X_t)$  und  $X_t = X_0 + \int_0^t 1 dX_s$ .

*Beweis von Satz 3.9.* Betr. Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$f_n(0) = 0, \quad f_n'(x) = \varphi(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  „glatte Version“ des Vorzeichens ( $\varphi' \geq 0$ ,  $-1 \leq \varphi(\cdot) \leq 1$ ,  $\varphi \equiv -1$  auf  $(-\infty, 0]$ ,  $\varphi \equiv +1$  auf  $[1, \infty)$ ). Es gilt

$$|f_n'(x)| \leq 1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - |x|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad f_n'(x) \nearrow_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(x).$$

Die Itô-Formel liefert

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_s) dX_s + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^t \overbrace{f_n''(X_s)}^{\geq 0} d\langle X \rangle_s}_{=: C_t^{(n)}}. \quad (3.13)$$

Sei  $X = M + A$  die kanonische Zerlegung von  $X$ , o.E.

$$\mathbb{E}\left[\sup_t |M_t| + \langle M \rangle_\infty\right] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left[\sup_t V_t(A)\right] < \infty$$

(sonst lokalisiere mittels geeign. Stoppfolge).

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty (\text{sgn}(X_s) - f'_n(X_s)) dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \underbrace{(\text{sgn}(X_s) - f'_n(X_s))^2}_{\rightarrow 0 \text{ f\"ur } n \rightarrow \infty} d\langle M \rangle_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mit dominierter Konv., mit Doob-Ungleichung demnach

$$\sup_t \left| \int_0^t (\text{sgn}(X_s) - f'_n(X_s)) dM_s \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} 0$$

und

$$\left| \int_0^\infty (\text{sgn}(X_s) - f'_n(X_s)) dA_s \right| \leq \int_0^\infty |\text{sgn}(X_s) - f'_n(X_s)| d|A|_s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

(realisierungswise, mit monotoner Konv.).

Lasse in (3.13)  $n = n_k \nearrow \infty$  längs einer geeigneten Teilfolge, so ergibt sich

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \text{sgn}(X_s) dX_s + \ell_t, \quad t \geq 0$$

mit

$$\ell_t := \lim_{k \rightarrow \infty} C_t^{(n_k)}, \quad t \geq 0 \quad (\text{f.s.})$$

Nach Konstruktion hat  $(\ell_t)$  stetige, nicht-fallende Pfade und

$$\ell_t = |X_t| - |X_0| - \int_0^t \text{sgn}(X_s) dX_s \quad \text{ist } \mathcal{F}_t\text{-messbar.}$$

Zum Beweis von (3.12): Intuitiv folgt aus

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s| > 1/n\}} dC_s^{(n)} = 0, \quad t \geq 0$$

(was nach Konstruktion richtig ist) mit  $n = n_k \rightarrow \infty$  auch  $\int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s| \neq 0\}} d\ell_s = 0$ . Anstatt den Grenzwert explizit zu rechtfertigen (was etwas aufwendig ist, da sowohl der Integrand als auch der Integrator von  $n$  abhängen), argumentieren wir folgendermaßen:

Es gilt (Itô-Formel, angewendet auf  $X$  und die Funktion  $f(x) = x^2$ )

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t,$$

andererseits liefert die Itô-Formel, angewendet auf das Semimartingal  $(|X_t|)_{t \geq 0}$  und die Funktion  $f(x) = x^2$  mit (3.11)

$$\begin{aligned} X_t^2 &= |X_t|^2 = |X_0|^2 + 2 \int_0^t |X_s| d|X|_s + \langle |X| \rangle_t \\ &= X_0^2 + 2 \int_0^t |X_s| \text{sgn}(X_s) dX_s + 2 \int_0^t |X_s| d\ell_s + \langle |X| \rangle_t \\ &= X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + 2 \int_0^t |X_s| d\ell_s + \langle X \rangle_t \end{aligned}$$

denn aus (3.11) folgt mit Def. 2.40 und Prop. 2.38, 3., dass  $\langle |X| \rangle_t = \int_0^t (\text{sgn}(X_s))^2 d\langle X \rangle_s = \langle X \rangle_t$ . Demnach gilt (f.s.)

$$2 \int_0^t |X_s| d\ell_s = 0 \quad \text{für } t \geq 0,$$

was (3.12) impliziert.  $\square$

**Beobachtung 3.11.**  $X$  eindim. BB mit Lokalzeitprozess  $(\ell_t^X)_{t \geq 0}$ ,  $(|X_t|)_{t \geq 0}$  ist Semimartingal (vgl. Tanaka-Formel (3.11), Satz 3.9), sei  $(\ell_t^{|X|})_{t \geq 0}$  der zugehörige Lokalzeitprozess. Dann gilt

$$\ell_t^{|X|} = 2\ell_t^X, \quad t \geq 0 \quad \text{f.s.},$$

insbesondere ist  $(\ell_t^X)_{t \geq 0}$  adaptiert an  $(\mathcal{F}_t^{|X|})_t$ .

*Beweis.* Mit Tanaka-Formel (Satz 3.9) gilt

$$\begin{aligned} |X_t| - |X_0| &= \int_0^t \underbrace{\text{sgn}(|X_s|)}_{=1-2\mathbf{1}_{\{|X_s|=0\}}} d|X|_s + \ell_t^{|X|} \\ &= \int_0^t d|X|_s - 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s|=0\}} d|X|_s + \ell_t^{|X|} \\ &= \int_0^t \text{sgn}(X_s) dX_s + d\ell_t^X \\ &= |X_t| - |X_0| - 2 \underbrace{\int_0^t (-1)\mathbf{1}_{\{X_s=0\}} dX_s - 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} d\ell_t^X + \ell_t^{|X|}}_{\equiv 0 \quad (*)} \end{aligned}$$

wobei wir für (\*) beachten, dass

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} dX_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\mathbf{1}_{\{X_s=0\}})^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{P}(X_s = 0) ds = 0.$$

Somit

$$\ell_t^{|X|} = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}} d\ell_t^X = 2 \int_0^t d\ell_t^X = 2\ell_t^X,$$

denn  $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \neq 0\}} d\ell_t^X \equiv 0$  nach Satz 3.9.  $\square$

**Definition 3.12.** Für ein stetiges Semimartingal  $X$  definieren wir die Lokalzeit in  $a \in \mathbb{R}$  via

$$\ell_t^a = |X_t - a| - |X_0 - a| - \int_0^t \text{sgn}(X_s - a) dX_s \quad (3.14)$$

**Satz 3.13.** Sei  $X$  ein stetiges lokales Martingal. Es gibt eine Version des Lokalzeitprozesses  $(\ell_t^a : a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ , die in beiden Variablen stetig ist.

*Beweis.* Zu zeigen: Es gibt eine stetige Version von

$$(a, t) \mapsto \zeta(a, t) := \int_0^t \text{sgn}(X_s - a) dX_s.$$

Wir nehmen an

$$\sup_t |X_t|, \sup_t \langle X \rangle_t \leq K \quad \text{für ein } K < \infty$$

(sonst stoppe entsprechend).

Sei  $p > 4, a < b$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \underbrace{|\zeta(b, t) - \zeta(a, t)|^p}_{= \int_0^t (\text{sgn}(X_s - b) - \text{sgn}(X_s - a)) dX_s} \right] &= 2^p \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t \mathbf{1}_{(a, b]}(X_s) dX_s \right|^p \right] \\ &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t \mathbf{1}_{(a, b]}(X_s) d\langle X \rangle_s \right|^{p/2} \right] \end{aligned}$$

gemäß BDG-Ungleichung (Satz 2.57).

Sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  gegeben durch  $f(0) = 0, f'(x) = 0$  für  $x \leq -1$  und

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \text{ oder } x \geq 2, \\ 1 + x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Insbesondere gilt  $0 \leq f'(x) \leq 2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $\delta := b - a, f_{a,b}(x) := f((x - a)/\delta)$ , somit

$$f''_{a,b}(x) = \frac{1}{\delta^2} f''((x - a)/\delta) \geq \frac{1}{\delta^2} \mathbf{1}_{(a, b]}(x).$$

$$\begin{aligned} (0 \leq) \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{1}_{(a, b]}(X_s) d\langle X \rangle_s &\leq \frac{\delta^2}{2} \int_0^t f''_{a,b}(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= \delta^2 \left( f_{a,b}(X_t) - f_{a,b}(X_0) - \int_0^t f'_{a,b}(X_s) dX_s \right) \quad (\text{Itô-Formel}) \\ &\leq \delta^2 \underbrace{|f_{a,b}(X_t) - f_{a,b}(X_0)|}_{\leq 2|X_t - X_0|/\delta} + \delta^2 \left| \int_0^t \underbrace{f'_{a,b}(X_s)}_{= \frac{1}{\delta} f'((X_s - a)/\delta)} dX_s \right| \\ &\leq 4K\delta + \delta \left| \int_0^t f'((X_s - a)/\delta) dX_s \right| \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t f'((X_s - a)/\delta) dX_s \right|^{p/2} \right] \leq c_p \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t \underbrace{(f'((X_s - a)/\delta))^2}_{\leq 4} d\langle X \rangle_s \right|^{p/4} \right] \leq c_p 2^{p/2} \underbrace{\mathbb{E}[\langle X \rangle_\infty^{p/4}]}_{\leq K^{p/4}}$$

gemäß BDG-Ungleichung (Satz 2.57), also

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t \mathbf{1}_{(a, b]}(X_s) d\langle X \rangle_s \right|^{p/2} \right] \leq C_{K,p} \delta^{p/2} (1 + c_p 2^{p/2} K^{p/4}),$$

d.h.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \geq 0} |\zeta(b, t) - \zeta(a, t)|^p\right] \leq \tilde{C}_{K,p} |b - a|^{p/2}$$

(für ein  $\tilde{C}_{K,p} < \infty$ ).

Die Behauptung folgt mit Kolmogorovs Stetigkeitskriterium (Satz 1.5 und Bemerkung 1.6), angewendet auf den Prozess  $(\zeta(a, \cdot))_{a \in \mathbb{R}}$  mit Werten im polnischen Raum  $E = (C([0, \infty)), \|\cdot\|_\infty)$ .  $\square$

**Bemerkung 3.14.** Wir sehen

$$a \mapsto \ell_t^a \text{ ist Hölder-stetig von jeder Ordnung } < \frac{1}{2},$$

denn Satz 1.5 zeigt:  $\mathbb{E}[|Y_u - Y_v|^\alpha] \leq C|u - v|^{1+\beta} \Rightarrow Y$  besitzt Hölder- $(\beta/\alpha)$ -stetige Version.

**Korollar 3.15.**  $X$  stetiges Semimartingal, dann gibt es eine Version von  $(\ell_t^a : a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ , die stetig in  $t$  und càdlàg in  $a$  ist.

Sei  $X = M + A$  die kanonische Zerlegung, so ist  $\ell_t^a - \ell_t^{a-} = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} dA_s$ .

*Beweis.* Es ist (vgl. Def. 3.12)

$$\ell_t^a = \underbrace{|X_t - a| - |X_0 - a| - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dM_s}_{=: L_1(t, a)} - \underbrace{\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dA_s}_{=: L_2(t, a)}$$

$(t, a) \mapsto L_1(t, a)$  besitzt eine stetige Version nach Satz 3.13,

$(t, a) \mapsto L_2(t, a)$  ist nach Konstruktion stetig in  $t$  und càdlàg in  $a$

(denn  $a \mapsto \operatorname{sgn}(X_s - a)$  ist càdlàg, verwende dann z.B. dominierte Konvergenz).

Für die Formel für  $\ell_t^a - \ell_t^{a-}$  beachte

$$\operatorname{sgn}(X_s - a) - \lim_{b \nearrow a} \operatorname{sgn}(X_s - b) = -2\mathbf{1}_{\{X_s = a\}}.$$

$\square$

**Bericht 3.16** (Eine allgemeinere Form von Satz 3.9). Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex existiert die linksseitige Ableitung

$$D_- f(x) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \in \mathbb{R}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , und  $x \mapsto D_- f(x)$  ist nicht-fallend (denn für  $x < y < z$  gilt  $f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$  [ $\iff \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ ] wegen der Konvexität von  $f$ ), demnach definiert

$$\mu^f([a, b]) := D_- f(b) - D_- f(a), \quad a < b \quad \text{ein lokal-endliches positives Maß}$$

(man kann  $\mu^f$  als die 2. Ableitung von  $f$  im Distributionssinn auffassen, für  $f \in C^2(\mathbb{R})$  ist  $\mu^f(dx) = f''(x)dx$ ).

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein stetiges Semimartingal mit Lokalzeitenprozess  $(\ell_t^a, t \geq 0, a \in \mathbb{R})$ .

$(f(X_t))_{t \geq 0}$  ist ein Semimartingal und es gilt die Meyer-Itô-Formel:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t D_- f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \ell_t^a \mu^f(da). \quad (3.15)$$

Für  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und messbar gilt die Okkupationszeitformel:

$$\int_0^t \varphi(X_s) d\langle X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) \ell_t^a da, \quad t \geq 0 \quad \text{f.s.} \quad (3.16)$$

*Beweisideen/-skizze.* Die linksseitige Ableitung  $D_- f(x)$  existiert stets für konvexes  $f$  und ist nicht-fallend, denn für  $x < y < z$  gilt  $f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$  [ $\iff \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ ].

Für (3.15) betrachten wir zunächst ein stückweise lineares, konvexes  $f$  mit endlich vielen „Knicksstellen“, dann ist  $\mu^f = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j}$  und  $f(x) = d_0 + d_1 x + \sum_{j=1}^n c_j |x - x_j|$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, \dots, c_n > 0$ ,  $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ ; in diesem Fall erhält man (3.15) leicht aus der Tanaka-Formel. Im allgemeinen Fall approximiert man  $\mu^f$  geeignet mit  $\mu^{f_n}$  dieses Typs.

Für (3.16) sei zunächst  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ , sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  mit  $f'' = \varphi$ , dann gilt  $D_- f = f'$  und  $\int_{\mathbb{R}} g(a) \mu^f(da) = \int g(a) \varphi(a) da$  für jedes messbare  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Wir setzen  $g(a) = \ell_t^a$  ein und vergleichen den Ausdruck aus (3.15) mit dem Ausdruck der Itô-Formel für  $f(X_t)$ , um (3.16) in diesem Fall zu erhalten. Für den allgemeinen Fall beachten wir beispielsweise, dass die Klasse der  $\varphi$ , für die (3.16) gilt, einen unter monotoner Konvergenz abgeschlossenen Vektorraum bildet.

Details finden sich z.B. im Buch von Revuz & Yor, siehe [RY, Thm. VI.1.5 und Cor. VI.1.6] oder im Buch von Kallenberg, [Ka, Thm. 22.5].  $\square$

**Satz 3.17** (Yamada-Watanabe-Kriterium)<sup>3</sup>.  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, es gebe  $\varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  wachsend mit

$$\int_{(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varrho(u)} du = \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und  $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \varrho(|x - y|) \leq K|x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ , sowie  $|\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$  für ein  $K < \infty$ ,  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei Lipschitz-stetig.

Dann besitzt die SDGL

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.17)$$

(mit  $B=1$ -dim. BB) eine (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige starke Lösung.

*Beweis.*

<sup>3</sup>Toshio Yamada und Shinzo Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. II, 155–167, (1971). Unser Beweis folgt Jean-François Le Gall, Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Sém. Prob. XVII, 15–31, Lecture Notes in Math. 986, Springer, Berlin, (1983).

**Eindeutigkeit** Seien  $X, \tilde{X}$  starke Lösungen.

Es gilt  $\mathbb{E}[X_t^2], \mathbb{E}[\tilde{X}_t^2] < \infty$  (wie im Beweis von Satz 3.3).

Sei  $Y := X - \tilde{X}$ , also

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle_t &= \int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_s))^2 ds, \\ \int_0^t \frac{1}{\varrho(Y_s)} \mathbf{1}_{\{Y_s > 0\}} d\langle Y \rangle_s &= \int_0^t \underbrace{\frac{(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_s))^2}{\varrho(X_s - \tilde{X}_s)}}_{\leq 1 \text{ n. Vor.}} \mathbf{1}_{\{X_s > \tilde{X}_s\}} ds \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Die entscheidende Beobachtung ist, dass dies impliziert

$$\ell_t^0(Y) \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

(wobei  $\ell_t^0(Y) = |Y_t| - |Y_0| - \int_0^t \text{sgn}(Y_s) dY_s$  die (Semimartingal-)Lokalzeit von  $Y$  in 0 ist, vgl. Def. 3.12),

denn

$$(\infty >) \int_0^t \frac{1}{\varrho(Y_s)} \mathbf{1}_{\{Y_s > 0\}} d\langle Y \rangle_s = \int_{(0, \infty)} \frac{1}{\varrho(a)} \ell_t^a(Y) da$$

gemäß Okkupationszeitformel (3.16) (aus Bericht 3.16) und

$$\{\ell_t^0(Y) > 0\} \subset \bigcup_{\varepsilon, \delta \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)} \{\ell_t^a(Y) \geq \delta \text{ für } a \in (0, \varepsilon)\} \subset \left\{ \int_{(0, \infty)} \frac{1}{\varrho(a)} \ell_t^a(Y) da = \infty \right\}$$

(für die erste Inklusion verwenden wir, dass  $a \mapsto \ell_t^a(Y)$  càdlàg ist).

Mit Satz 3.9 ist

$$\begin{aligned} |X_t - \tilde{X}_t| &= |Y_t| = \underbrace{|Y_0|}_{=0} + \int_0^t \text{sgn}(Y_s) dY_s + \underbrace{\ell_t^0(Y)}_{=0} \\ &= \int_0^t \text{sgn}(Y_s) (b(X_s) - b(\tilde{X}_s)) ds + \int_0^t \text{sgn}(Y_s) (\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_s)) dB_s. \end{aligned}$$

Der Integrand im ersten Summanden ist beschränkt durch  $|\text{sgn}(Y_s)(b(X_s) - b(\tilde{X}_s))| \leq K|X_s - \tilde{X}_s|$ , der zweite Summand erfüllt  $\mathbb{E}[\dots] = 0$ , also

$$\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|] \leq K \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \tilde{X}_s|] ds,$$

mit Gronwall-Lemma (Lemma 3.5) folgt

$$\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|] = 0 \quad t \geq 0,$$

wegen Stetigkeit der Pfade folgt

$$\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t \quad \forall t \geq 0) = 1.$$

**Existenz** Man kann hierzu die (unten dargestellte) „allgemeine Theorie“ verwenden: Der Eindeutigkeitspart zeigt, dass (3.17) pfadweise eindeutig im Sinne von Def. 3.18 ist, in Satz 3.25 unten wird eine schwache Lösung (insbesondere) von (3.17) bereitgestellt, Bericht 3.19, 2) zeigt dann, dass es auch eine (eindeutige) starke Lösung von (3.17) gibt.

Alternativ kann man explizit rechnen und Picard-Iteration wie Beweis von Satz 3.3 verwenden :

Sei

$$X_t^0 := x_0, \quad X_t^{N+1} := x_0 + \int_0^t b(X_s^N) ds + \int_0^t \sigma(X_s^N) dB_s,$$

es gilt  $\mathbb{E}[(X_t^N)^2] < \infty$  für alle  $t \geq 0, N \in \mathbb{N}$  (Argument wie im Beweis von Satz 3.3).

Setze

$$Y_t^N := X_t^{N+1} - X_t^N,$$

es gilt

$$\ell_t^0(Y^N) \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

(Argument wie oben:

$\langle Y^N \rangle_t = \int_0^t (\sigma(X_s^N) - \sigma(X_s^{N-1})) ds$ , wäre  $\ell_t^0(Y^N) > 0$ , so wäre  $\int_0^t \frac{1}{\varrho(Y_s^N)} \mathbf{1}_{\{Y_s^N > 0\}} d\langle Y \rangle_s = \infty$ .)

Wie oben mit Tanaka-Formel

$$\begin{aligned} |Y_t^N| &= 0 + \int_0^t \text{sgn}(Y_s^N) dY_s^N + 0 \\ &= \int_0^t \text{sgn}(Y_s^N) (b(X_s^N) - b(X_s^{N-1})) ds + \int_0^t \text{sgn}(Y_s^N) (\sigma(X_s^N) - \sigma(X_s^{N-1})) dB_s \\ &=: D_t^{(1,N)} + D_t^{(2,N)} \end{aligned}$$

$$(D_t^{(2,N)})_{t \geq 0} \text{ ist Martingal} \quad \Rightarrow \quad \Delta^N(t) := \mathbb{E}[|Y_t^N|]$$

erfüllt

$$\Delta^N(t) \leq K \int_0^t \Delta^{N-1}(s) ds, \quad \text{weiterhin ist} \quad \sup_{t \leq T} \Delta^0(t) \leq C$$

für ein  $C = C(T) < \infty$ , erhalte induktiv (analog zum Beweis von Satz 3.3)

$$\Delta^N(t) \leq \frac{(ct)^N}{N!} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

mit einem  $c = c(T) < \infty$ .

Mit Doob's  $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} (D_s^{(2,N)})^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} \left[ (D_t^{(2,N)})^2 \right] = 4\mathbb{E} \left[ \int_0^t \underbrace{(\sigma(X_s^N) - \sigma(X_s^{N-1}))^2}_{\leq K|Y_s^{N-1}|} ds \right] \\ &\leq 4K \int_0^t \Delta^{N-1}(s) ds \leq \frac{(c't)^N}{N!} \end{aligned}$$

für  $t \leq T$  mit einem  $c' = c'(T) < \infty$  und damit

$$\begin{aligned} f^N(t) &:= \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} (Y_s^N)^2 \right] \leq 2\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t K \sup_{u \leq s} |Y_u^N| ds \right)^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} (D_s^{(2,N)})^2 \right] \\ &\leq 2tK^2 \int_0^t f^N(s) ds + \frac{(c't)^N}{N!} \end{aligned}$$

und somit mit Gronwall-Ungleichung

$$\sup_{t \leq T} f^N(t) \leq \frac{(c'T)^N}{N!} e^{2TK^2}.$$

Wie im Beweis von Satz 3.3 zeigt dies, dass die Folge  $X^N$  f.s. lokal gleichmäßig gegen eine Lösung von (3.17) konvergiert.  $\square$

**Definition 3.18.** Eine stochastische Differentialgleichung wie (3.1) heißt *pfadweise eindeutig* (auch: stark eindeutig), wenn für je zwei Lösungen  $(X, B)$  und  $(X', B)$  auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (und mit derselben Brownschen Bewegung  $B$ ) gilt  $\mathbb{P}(X_t = X'_t \forall t \geq 0) = 1$ .

Sie heißt *in Verteilung eindeutig* (auch: schwach eindeutig), wenn für je zwei Lösungen  $(X, B)$  und  $(X', B')$  auf möglicherweise verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen gilt  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$ .

**Bericht 3.19** (Zusammenhänge zwischen den Lösungsbegriffen). 1) Gilt für eine stochastische Differentialgleichung wie (3.1) pfadweise Eindeutigkeit, so gilt auch Eindeutigkeit in Verteilung.

2) Eine pfadweise eindeutige SDGL, die eine schwache Lösung besitzt, besitzt auch (zu beliebig vorgegebener Brownscher Bewegung) eine eindeutige starke Lösung.

Der Beweis benutzt die (intuitiv plausible) Idee,  $(X, B)$  als ein zweistufiges Experiment zu realisieren: Generiere zunächst eine Brownsche Bewegung  $B$ , dann  $X$  gemäß  $P(X|B)$  mit Hilfe eines geeigneten Übergangskerns. Eine analoge Konstruktion für  $(X', B')$  mit  $P'(X'|B')$  gestattet dann,  $X$  und  $X'$  auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum zu realisieren und so die pfadweise Eindeutigkeit auszunutzen. Die technischen Details der Messbarkeitskonstruktion sind zu aufwendig, um hier wiederzugeben zu werden, siehe z.B. Rogers & Williams [RW], Vol. 2, Kap. V.17 oder Karatzas & Shreve [KS], Kap. 5.3.D.

### 3.1 Martingalprobleme und schwache Lösungen von SDGLn

**Definition 3.20.** Seien  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  messbar,  $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$  sei positiv semidefinit für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ , d.h.  $\xi^T a(x) \xi = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j a_{ij}(x) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ , sei  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Eine Lösung des *Martingalproblems*  $MP(a, b, x)$  ist ein  $W$ -maß  $P$  auf  $(C([0, \infty), \mathbb{R}^d), \mathcal{F})$  mit

$$P(X_0 = x) = 1, \tag{3.18}$$

für alle  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$  ist

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds \tag{3.19}$$

ein Martingal unter  $P$ , wobei

$$Lf(y) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(y) + \sum_{i=1}^d b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} f(y), \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (3.20)$$

**Beobachtung 3.21.** Seien  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$  messbar, lokal beschränkt,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Auf einem filtrierten  $W$ -raum  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  gebe es eine  $n$ -dimensionale  $(\mathcal{F}_t)$ -BB  $(B_t)_{t \geq 0}$  und einen stetigen, adaptierten Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (3.21)$$

Dann ist für jedes  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  der Prozess  $(M_t^f)_{t \geq 0}$  aus (3.19) mit  $a(y) = \sigma(y)\sigma(y)^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  in (3.20) ein stetiges lokales ( $\mathbb{P}$ -)Martingal.

*Beweis.* Da  $X$  (3.21) erfüllt, ist

$$\begin{aligned} \langle X^i, X^j \rangle_t &= \left\langle \sum_{k=1}^n \int_0^\cdot \sigma_{ik}(X_u) dB_u^k, \sum_{\ell=1}^n \int_0^\cdot \sigma_{j\ell}(X_u) dB_u^\ell \right\rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_{ik}(X_s) \sigma_{jk}(X_s) ds = \int_0^t (\sigma \sigma^T)_{ij}(X_s) ds = \int_0^t a_{ij}(X_s) ds. \end{aligned}$$

Mit Itô-Formel ist

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{ij}^2 f(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_s) b_i(X_s) ds + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^n \int_0^t \partial_i f(X_s) \sigma_{ik}(X_s) dB_s^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t a_{ij}(X_s) \partial_{ij}^2 f(X_s) ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t Lf(X_s) ds + \int_0^t (\nabla f(X_s))^T \sigma(X_s) dB_s \end{aligned}$$

(mit  $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_d f(x))^T$ ), d.h.  $M^f$  ist (lokales) Martingal.  $\square$

**Satz 3.22.** 1. Seien die Voraussetzungen von Beob. 3.21 gegeben und erfüllen  $b, \sigma$  die Wachstumsbedingung (3.4) aus Satz 3.3, d.h.  $\|b(y)\|^2 + \|\sigma(y)\|^2 \leq K(1 + \|y\|^2)$ ,  $X$  löse (3.21). Dann ist die Verteilung  $P_{x_0} := \mathbb{P} \circ X^{-1}$  von  $X$  (ein  $W$ -maß auf  $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{F})$ ) eine Lösung des Martingalproblems  $\text{MP}(a, b, x_0)$  mit  $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$ .

2. Sei umgekehrt  $P_{x_0}$  eine Lösung von  $\text{MP}(a, b, x_0)$ . Dann gibt es einen filtrierten  $W$ -raum  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ , auf dem eine  $n$ -dim. BB  $(\beta_t)$  und ein stetiger, adaptierter Prozess  $Z = (Z_t)$  definiert sind mit

$$Z_t = x_0 + \int_0^t b(Z_s) ds + \int_0^t \sigma(Z_s) d\beta_s, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (3.22)$$

und die Verteilung von  $Z$  unter  $\mathbb{P}$  ist  $P_{x_0}$ .

*Beweis.* 1.  $X$  erfülle (3.21). Wie in Beob. 3.21 bewiesen ist  $(M_t^f)$  ein stetiges lokales  $(\mathbb{P})$ -Martingal. Zeige:

Für  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$  ist  $(M_t^f)$  ein  $(\mathbb{P})$ -Martingal.

Wie im Beweis von Beob. 3.21 ist

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \int_0^t \partial_i f(X_s) \sigma_{ij}(X_s) dB_s^j,$$

also

$$\begin{aligned} \langle M^f \rangle_t &= \sum_{i,i'=1}^d \sum_{j,j'=1}^n \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_{i'}} \sigma_{ij} \sigma_{i'j'} \right) (X_s) d\langle B^j, B^{j'} \rangle_s \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i,i'=1}^d \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_{i'}} \sigma_{ij} \sigma_{i'j} \right) (X_s) ds \\ &\leq \|\nabla f\|_\infty^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i,i'=1}^d \int_0^t \underbrace{|\sigma_{ij}(X_s) \sigma_{i'j}(X_s)|}_{\leq \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2(X_s) + \frac{1}{2}\sigma_{i'j}^2(X_s)} ds \\ &\leq C \int_0^t (1 + \|X_s\|^2) ds \end{aligned}$$

mit  $C = C(f, d, n, K) < \infty$ . Somit gilt unter der Wachstumsbedingung (3.4) aus Satz 3.3, die  $\sup_{t \leq T} \mathbb{E}[\|X_t\|^2] < \infty$  erzwingt (vgl. den Bew. von Satz 3.3), dass

$$\mathbb{E}[\langle M^f \rangle_t] < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dies zeigt, dass  $M^f$  tatsächlich ein Martingal ist (sogar  $M^f \in \mathcal{M}_2^c$ , vgl. Bem. 2.56, 2. oder Kor. 2.59).

Seien  $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_m = s < t$ ,  $g_0, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. und m.b.

$$\begin{aligned} &\int_{C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)} \left( f(\omega_t) - f(\omega_0) - \int_0^t Lf(\omega_s) ds \right) g_0(\omega_{s_0}) \dots g_m(\omega_{s_m}) P_{x_0}(d\omega) \\ &= \mathbb{E}[M_t^f g_0(X_{s_0}) \dots g_m(X_{s_m})] = \mathbb{E}[M_s^f g_0(X_{s_0}) \dots g_m(X_{s_m})] \quad (\text{denn } M^f \text{ ist } \mathbb{P}\text{-Mart.}) \\ &= \int_{C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)} \left( f(\omega_s) - f(\omega_0) - \int_0^s Lf(\omega_s) ds \right) g_0(\omega_{s_0}) \dots g_m(\omega_{s_m}) P_{x_0}(d\omega), \end{aligned}$$

und  $P_{x_0}(\omega_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$ .

2. Wir betrachten hier nur denn Fall, dass  $n = d$  und  $a(x)$  lokal elliptisch ist, d.h. für  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt gibt es ein  $c_U > 0$  mit

$$\xi^T a(x) \xi \geq c_U \|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.23)$$

(Für den allgemeinen Fall siehe z.B. [RW, Vol II, Thm. V.20.1].)

Wegen (3.23) und  $a = \sigma \sigma^T$  ist jedes  $\sigma(y)$  invertierbar, für  $y \in U$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  ist

$$\|\xi\|^2 = \xi^T \sigma^{-1}(y) a(y) (\sigma^{-1}(y))^T \xi \geq c_U \|(\sigma^{-1}(y))^T \xi\|^2,$$

d.h.

$$\sigma^{-1}(\cdot) \quad \text{ist lokal beschränkt (und messbar)} \quad (3.24)$$

Auf  $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{F}, P_{x_0})$  sei  $\mathcal{H}_t$  die von  $\{X_s, s \leq t\}$  und den  $P_{x_0}$ -Nullmengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra, und

$$\mathcal{G}_t := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}, \quad t \geq 0$$

so dass

$(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t), P_{x_0})$  den üblichen Bedingungen genügt (vgl. Def. 2.2).

Seien

$$M_t^i := X_t^i - X_0^i - \int_0^t b_i(X_s) ds, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.25)$$

Für  $f(y) = y_i$  ist  $Lf(y) = b_i(y)$ , also sind (mit geeignetem Stoppen, da  $y \mapsto y_i$  keinen kompakten Träger hat)

die  $M^i$  stetige lokale  $(\mathcal{G}_t)$ -Martingale.

Analog erfüllt  $f(y) = y_i y_j$   $Lf(y) = a_{ij}(y) + y_i b_j(y) + y_j b_i(y)$ , also ist

$$X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - \int_0^t a_{ij}(X_s) + X_s^j b_i(X_s) + X_s^i b_j(X_s) ds \quad \text{stetiges lokales } (\mathcal{G}_t)\text{-Martingal.} \quad (3.26)$$

Die Itô-Formel zeigt

$$\begin{aligned} X_t^i X_t^j &= X_0^i X_0^j + \int_0^t X_s^i dX_s^j + \int_0^t X_s^j dX_s^i + \langle X^i, X^j \rangle_t \\ &\stackrel{(3.25)}{=} X_0^i X_0^j + \int_0^t X_s^j b_i(X_s) + X_s^i b_j(X_s) ds + \langle M^i, M^j \rangle_t + \text{stet. lok. } (\mathcal{G}_t)\text{-Mart.} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aus (3.26) und (3.27) ergibt sich

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(X_s) ds, \quad t \geq 0 \quad (P_x\text{-f.s.}) \quad (3.28)$$

Sei

$$\beta_t := \int_0^t \sigma^{-1}(X_s) dM_s, \quad t \geq 0 \quad \left( \text{d.h. } \beta_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}^{-1}(X_s) dM_s^j \right), \quad (3.29)$$

$(\beta_t)$  ist stetiges lokales  $(\mathcal{G}_t)$ -Martingal mit

$$\begin{aligned} \langle \beta^i, \beta^j \rangle_t &= \left\langle \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_{ik}^{-1}(X_s) dM_s^k, \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{j\ell}^{-1}(X_s) dM_s^\ell \right\rangle_t \\ &= \sum_{k,\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{ik}^{-1}(X_s) \sigma_{j\ell}^{-1}(X_s) d\langle M^k, M^\ell \rangle_s \\ &\stackrel{(3.28)}{=} \sum_{k,\ell=1}^d \int_0^t \sigma_{ik}^{-1}(X_s) \sigma_{j\ell}^{-1}(X_s) a_{k\ell}(X_s) ds \\ &= \int_0^t (\sigma^{-1}(X_s) a(X_s) (\sigma^{-1})^T(X_s))_{ij} ds = \delta_{ij} t. \end{aligned}$$

Gemäß Lévy's Charakterisierung der BB (Satz 2.54) ist demnach

$$(\beta_t) \text{ } d\text{-dim. } (\mathcal{G}_t)\text{-BB unter } P_x.$$

Schließlich zeigt (3.29), dass

$$\int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s = \int_0^t \sigma(X_s) \sigma^{-1}(X_s) dM_s = M_s$$

und somit (vgl. (3.25))

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s,$$

d.h.  $Z := X$  und  $\beta$  lösen (3.22). □

**Korollar 3.23.** *Ang.,  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$  erfüllen die Lipschitz-Bedingung*

$$\|b(y) - b(z)\| + \|\sigma(y) - \sigma(z)\| \leq K \|y - z\|, \quad y, z \in \mathbb{R}^d, t \geq 0 \quad (3.30)$$

(vgl. auch (3.3) in Satz 3.3). Dann besitzt für jeden Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  das Martingalproblem  $\text{MP}(a, b, x_0)$  mit Generator  $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i$ , wo  $a(\cdot) = \sigma(\cdot) \sigma(\cdot)^T$ , eine eindeutige Lösung.

(Man sagt, das Martingalproblem ist wohlgestellt.)

*Beweis.*

**Existenz** Nach Satz 3.3 gibt es eine Lösung  $X$  von (3.21) (auf jedem  $W$ -raum, auf dem es eine entsprechende Brownsche Bewegung  $B$  gibt), nach Satz 3.22, 1. ist die Verteilung von  $X$  eine Lösung von  $\text{MP}(a, b, x_0)$ .

**Eindeutigkeit** Sei  $P_{x_0}$  eine Lösung von  $\text{MP}(a, b, x_0)$ . Nach Satz 3.22, 2. gibt es (auf einem geeign. filtrierten  $W$ -raum) eine  $n$ -dim. BB  $(\beta_t)$  und einen stetigen, adaptierten Prozess  $Z = (Z_t)$  mit

$$Z_t = x_0 + \int_0^t b(Z_s) ds + \int_0^t \sigma(Z_s) d\beta_s, \quad t \geq 0, \quad (3.31)$$

so dass  $P_{x_0} = \mathcal{L}(Z)$ . (3.31) besitzt eine eindeutige starke Lösung nach Satz 3.3, die man als lokal gleichmäßigen Grenzwert  $(X_t^\infty)$ ,  $X_t^\infty := \lim_{N \rightarrow \infty} X_t^N$  von

$$X_t^0 := x_0, \quad X_t^{N+1} := x_0 + \int_0^t b(X_s^N) ds + \int_0^t \sigma(X_s^N) d\beta_s, \quad t \geq 0, N \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

erhält, somit  $P_{x_0} = \mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(X^\infty)$ . Die Verteilung von  $X^N$  und somit auch die von  $X^\infty$  hängt nach Konstruktion nur von der Verteilung von  $(\beta_t)$  ab (d.h. dem Wienermaß) und ist durch (3.32) eindeutig festgelegt. Folglich gilt  $Q = \mathcal{L}(X^\infty) = P_{x_0}$  für jede Lösung  $Q$  von  $\text{MP}(a, b, x_0)$ . □

**Bemerkung 3.24.** Korollar 3.23 ist insoweit etwas unbefriedigend, dass die Basisvoraussetzung (3.30) der Lipschitzstetigkeit an  $\sigma(\cdot)$  gestellt wird und nicht an das in der Formulierung des Martingalproblems auftretende  $a(\cdot) = \sigma(\cdot) \sigma(\cdot)^T$ .

Im Allgemeinen genügt Lipschitzstetigkeit von  $a(\cdot)$  nicht, damit auch seine „Wurzel“  $\sigma(\cdot)$  Lipschitzstetig wird (betr. etwa in  $d = 1$   $a(x) = |x|$ , so ist  $\sigma(x) = \sqrt{|x|}$ ).

Bekannt sind folgende Kriterien (siehe z.B. D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Springer, 1979, Kap. 5.2):

- Wenn  $a(\cdot)$  uniform elliptisch ist (d.h.  $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_{\xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\|=1} \xi^T a(x) \xi > 0$ ) und global Lipschitz, so besitzt es eine „Lipschitz-Wurzel“.
- Wenn  $a(\cdot)$  beschränkt ist und (koordinatenweise) zweimal stetig diff'bar mit beschränkten zweiten Ableitungen ( $\max_{1 \leq i, j \leq d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_{ij}^2 a(x)| < \infty$ ), so besitzt es eine „Lipschitz-Wurzel“.

**Zur Existenz von (schwachen) Lösungen** Während für die Eindeutigkeit der schwachen Lösung einer SDGI / der Lösung des zugehörigen Martingalproblems typischerweise Lipschitz-Annahmen an die Koeffizienten (oder sehr spezielle Argumente für den konkreten Einzelfall) notwendig sind, kann die Existenz einer Lösung unter recht milden Wachstumsbedingungen allgemein sichergestellt werden:

**Satz 3.25.** Seien  $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und höchstens linear wachsend, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R}: |b(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$  mit einem  $K < \infty$ . Dann hat die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad (3.33)$$

mit  $X_0 = x_0$  für jeden Startpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  (mindestens) eine schwache Lösung (und mit Satz 3.22 besitzt somit das zugehörige Martingalproblem mindestens eine Lösung).

*Beweis.* Die Idee ist, eine Approximation mittels Euler(-Maruyama)-Schema zu konstruieren, Straffheit der Folge auf dem Pfadraum (via Kolmogorovs Momentenkriterium, vgl. Satz 1.5) zu zeigen und dann eine konvergente Teilfolge auszuwählen; der Limesprozess löst dann das zugehörige Martingalproblem. Dieser Ansatz geht auf D. Stroock und S. Varadhan, 1969, zurück.

1. Schritt Für  $N \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$  sei  $[t]_N := 2^{-N} \lfloor 2^N t \rfloor$ , sei  $B$  Standard-Brownsche Bewegung,  $Y$  davon unabhängig, reelle ZV. Die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t^{(N)} = b(X_{[t]_N}^{(N)})dt + \sigma(X_{[t]_N}^{(N)})dB_t \quad (3.34)$$

mit  $X_0^{(N)} = Y$  hat die eindeutige „explizite“ (starke) Lösung

$$X_t^{(N)} = X_{[t]_N}^{(N)} + b(X_{[t]_N}^{(N)})(t - [t]_N) + \sigma(X_{[t]_N}^{(N)})(B_t - B_{[t]_N}). \quad (3.35)$$

Zeige: Für  $T > 0$ ,  $p > 1$  gibt es ein  $C = C(T, p, K)$  so dass

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} |X_s^{(N)}|^{2p} \right] \leq C(1 + \mathbb{E}[|Y|^{2p}])e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{und} \quad (3.36)$$

$$\mathbb{E} \left[ |X_t^{(N)} - X_s^{(N)}|^{2p} \right] \leq C(1 + e^{CT})(1 + \mathbb{E}[|Y|^{2p}])(t - s)^p, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad (3.37)$$

(insbesondere sind die Schranken nicht von  $N$  abhängig). Dazu schreibe

$$|X_t^{(N)}|_t^* := \sup_{s \leq t} |X_s^{(N)}|, \quad M_t^{(N)} := \int_0^t \sigma(X_{[s]_N}^{(N)})dB_s,$$

es gilt

$$|X_t^{(N)}|^{2p} \leq 3^{2p}|Y|^{2p} + 3^{2p} \left| \int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)}) ds \right|^{2p} + 3^{2p} \left| \int_0^t \sigma(X_{[s]_N}^{(N)})dB_s \right|^{2p} \quad (3.38)$$

Für den mittleren Term beachte mit der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)}) ds \right|^{2p} &= t^{2p} \left| \frac{1}{t} \int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)}) ds \right|^{2p} \\ &\leq t^{2p-1} \int_0^t |b(X_{[s]_N}^{(N)})|^{2p} ds \leq t^{2p-1} (2K)^{2p} \int_0^t 1 + (|X_{[s]_N}^{(N)}|_s^*)^{2p} ds, \end{aligned} \quad (3.39)$$

für den dritten Term beachte, dass  $M^{(N)}$  ein (lokales) Martingal ist, mit der BDG-Ungleichung folgt (mit einem  $c_p < \infty$ )

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} |M_s^{(N)}|^{2p} \right] \leq c_p \mathbb{E} \left[ (\langle M^{(N)} \rangle_t)^p \right] = c_p \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)}) ds \right)^p \right] = c_p t^p \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)}) ds \right)^p \right] \quad (3.40)$$

$$\leq c_p t^{p-1} \int_0^t \mathbb{E} \left[ \sigma^{2p}(X_{[s]_N}^{(N)}) \right] ds \leq c_p (2K)^p t^{p-1} \int_0^t 1 + \mathbb{E} \left[ (|X_{[s]_N}^{(N)}|_s^*)^{2p} \right] ds. \quad (3.41)$$

Insgesamt ergibt sich damit aus (3.38) mit einem  $\tilde{C} < \infty$  für  $t \leq T$

$$\mathbb{E} \left[ (|X_t^{(N)}|_t^*)^{2p} \right] \leq \tilde{C} \left( \mathbb{E} [|Y|^{2p}] + t^{p-1} \int_0^t 1 + \mathbb{E} \left[ (|X_s^{(N)}|_s^*)^{2p} \right] ds \right), \quad (3.42)$$

für  $f_N(t) := \mathbb{E} \left[ (|X_t^{(N)}|_t^*)^{2p} \right]$  gilt also (mit entsprechend angepasstem  $C < \infty$ )

$$f_N(t) \leq C (1 + \mathbb{E} [|Y|^{2p}]) + C \int_0^t f_N(s) ds, \quad (3.43)$$

woraus (3.36) mittels Gronwall-Ungleichung folgt.

Um (3.37) zu beweisen betrachten wir für eine Wahl von  $0 \leq s \leq t \leq T$ :  $\tilde{X}_r := X_{s+r}^{(N)} - X_s^{(N)}$ ,  $0 \leq r \leq t-s$  (insbesondere  $\tilde{X}_0 = 0$ ) und wenden (3.42) auf  $\tilde{X}_{t-s}$  an:

$$\mathbb{E} \left[ |X_t^{(N)} - X_s^{(N)}|^{2p} \right] = \mathbb{E} \left[ |\tilde{X}_{t-s}|^{2p} \right] \leq \tilde{C} (t-s)^{p-1} \int_0^{t-s} 1 + \mathbb{E} \left[ (|\tilde{X}_r|_r^*)^{2p} \right] dr \quad (3.44)$$

$$\leq \tilde{C} (t-s)^p \left( 1 + 2^p \mathbb{E} \left[ (|X_T^{(N)}|_T^*)^{2p} \right] \right) \quad (3.45)$$

2. Schritt Sei  $P_N := \mathcal{L}(X^{(N)}) \in \mathcal{M}_1(C([0, \infty), \mathbb{R}))$  (wir statten  $C([0, \infty), \mathbb{R})$  mit einer Metrik aus, die die lokal gleichmäßige Konvergenz metrisiert).

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli sind Mengen von Funktionen des Typs

$$A_{\alpha, C_1, C_2} := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{t \leq T} |f(t)| \leq C_1, \sup_{0 \leq s < t \leq T} |f(t) - f(s)| / (t-s)^\alpha \leq C_2 \right\} \quad (3.46)$$

mit  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $C_1, C_2 < \infty$  kompakt in  $C([0, T], \mathbb{R})$ . Aus (3.36), (3.37) und Kolmogorovs Momentenkriterium (Satz 1.5) ergeben sich für  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $\varepsilon > 0$  Konstanten  $C_1, C_2 < \infty$ , so dass

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} P_N(A_{\alpha, C_1, C_2}) > 1 - \varepsilon. \quad (3.47)$$

Demnach ist die Familie  $P_N$  (zunächst eingeschränkt auf das Zeitintervall  $[0, T]$ ) straff, mit dem Satz von Prohorov gibt es eine schwach konvergente Teilfolge. Lasse  $T$  längs  $\mathbb{N}$  divergieren, ein Diagonalisierungsargument zeigt:

$$P = w - \lim_{k \rightarrow \infty} P_{N_k} \quad \text{existiert für eine Teilfolge } N_k \quad (3.48)$$

3. *Schritt* Setze den Startpunkt  $Y := x_0$  in obiger Konstruktion.  $P$  löst das Martingalproblem  $\text{MP}(\sigma^2, b, x_0)$ : Sei  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ . Nach Konstruktion ist für jedes  $N$  der Prozess

$$M_t^{f,N} := f(X_t^{(N)}) - f(x_0) - \int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)}) f'(X_s^{(N)}) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)}) f''(X_s^{(N)}) ds \quad (3.49)$$

ein Martingal, d.h. für  $0 \leq s_1 < \dots < s_m \leq s < t, g_1, \dots, g_m \in C_b(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathbb{E} \left[ \left( M_t^{f,N} - M_s^{f,N} \right) \prod_{j=1}^m g_j(X_{s_j}^{(N)}) \right] = 0. \quad (3.50)$$

Daraus ergibt sich (mit der Stetigkeit von  $b, \sigma$  und (3.36), um gleichgradige Integrierbarkeit sicherzustellen) mit (3.48) auch

$$\mathbb{E}_P \left[ \left( f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t b(X_u) f'(X_u) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_u) f''(X_u) du \right) \prod_{j=1}^m g_j(X_{s_j}) \right] = 0, \quad (3.51)$$

d.h.  $P$  löst  $\text{MP}(\sigma^2, b, x_0)$ .

4. *Schritt* Mit Satz 3.22 erhalten wir aus der Lösung von  $\text{MP}(\sigma^2, b, x_0)$  eine schwache Lösung von (3.33).  $\square$

**Bemerkung.** Der Beweis funktioniert ebenso (mit leicht höherem Notationsaufwand) für Prozesse in  $\mathbb{R}^d$ .

# Anhang A

## Ergänzung: Markovprozesse und Martingalprobleme

Schreibweise (vgl. auch Def. 3.20):

**Definition A.1.** Seien  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  messbar (und  $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$  symmetrisch, positiv semidefinit für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ ),  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ .

$P \in \mathcal{M}_1(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$  ist Lösung des Martingalproblems  $\text{MP}(a, b, \mu)$ , wenn für alle  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

ein Martingal unter  $P$  ist (wir schreiben  $X_t = \omega(t)$  für den kanonischen Prozess auf  $(C([0, \infty), \mathbb{R}^d), \mathcal{F})$ ) und  $P \circ X_0^{-1} = \mu$  (d.h.  $X_0 \sim \mu$  unter  $P$ ), wobei

$$Lf(y) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(y) + \sum_{i=1}^d b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} f(y).$$

**Bem.** Dies ergänzt Def. 3.20 (dort hatten wir Martingalprobleme  $\text{MP}(a, b, x) = \text{MP}(a, b, \delta_x)$  zu einem festen Startpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$  betrachtet). Wenn  $P_x$  Lösung zu  $\text{MP}(a, b, x) = \text{MP}(a, b, \delta_x)$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  ist, so ist  $P := \int_{\mathbb{R}^d} P_x \mu(dx)$  Lösung für  $\text{MP}(a, b, \mu)$ .

**Bemerkung A.2.**  $P$  löst  $\text{MP}(a, b, P \circ X_0^{-1})$  g.d.w. (vgl. Beweis von Satz 3.22)

$$\mathbb{E} \left[ \left( f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Lf(X_s) ds \right) g_0(X_{s_0}) \cdots g_m(X_{s_m}) \right] = 0 \quad (\text{A.1})$$

für alle Wahlen  $0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_m = s < t$ ,  $g_0, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. und messbar.

(Wir betrachten im Kontext von Martingalproblemen hier i.A. die „rohe“, d.h. unvollständigste, kanonische Filtration  $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \leq t)$  auf  $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ .)

**Proposition A.3.** *Es gelte*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), t \geq 0 : \quad P, Q \text{ Lösungen von } \text{MP}(a, b, \mu) \Rightarrow P \circ X_t^{-1} = Q \circ X_t^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

*Dann besitzt für jedes  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$   $\text{MP}(a, b, \mu)$  höchstens eine Lösung.*

(A.2) besagt in Worten folgendes: wenn für je zwei Lösungen zur selben Startverteilung die Randverteilungen zu jeder vorgegebenen festen Zeit gleich sind, so sind die Lösungen bereits gleich.

Prop. A.3 ist oft nützlich, da man für (A.2) nur (zeitlich) eindimensionale Marginalverteilungen betrachten muss, nicht die gesamte Verteilung auf dem Pfadraum.

*Beweis.* Seien  $P, Q$  Lösungen von  $\text{MP}(a, b, \mu)$ . Zu zeigen ist

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq s_1 < \dots < s_j, B_1, \dots, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : \\ P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j) = Q(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j) \quad (\text{A.3})$$

(denn Mengen dieses Typs bilden einen  $\cap$ -stabilen Erzeuger von  $\sigma(X_s, s \geq 0)$  auf  $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ .)

Wir zeigen (A.3) per Induktion über  $j$ :  $j = 1$  ✓ (nach Vor.)

Sei (A.3) für ein  $j \in \mathbb{N}$  wahr und

$$0 \leq s_1 < \dots < s_j, B_1, \dots, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ mit } P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j) > 0.$$

Definiere  $\bar{P} \in \mathcal{M}_1(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$  durch

$$\bar{P}(A) := \frac{P(\{X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j\} \cap A)}{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j)}$$

und einen stetigen Prozess

$$\bar{X}_t := X_{t+s_j}, \quad t \geq 0.$$

Sei  $m \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m = t < t+h$ ,  $g_0, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. und messbar.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\bar{P}} \left[ \left( f(\bar{X}_{t+h}) - f(\bar{X}_t) - \int_s^t Lf(\bar{X}_u) du \right) g_0(\bar{X}_{t_0}) \cdots g_m(\bar{X}_{t_m}) \right] \\ &= \frac{1}{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j)} \mathbb{E}^P \left[ \left( f(X_{t+h+s_j}) - f(X_{t+s_j}) - \int_{t+s_j}^{t+h+s_j} Lf(X_u) du \right) \right. \\ & \quad \left. \times g_0(X_{t_0+s_j}) \cdots g_m(X_{t_m+s_j}) \mathbf{1}_{B_1}(X_{s_1}) \cdots \mathbf{1}_{B_j}(X_{s_j}) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach Bem. A.2, d.h.

$$\bar{P} \circ \bar{X}^{-1} \text{ löst } \text{MP}(a, b, \bar{P} \circ \bar{X}_0^{-1}).$$

(anders gesagt:  $\bar{X}$  unter  $\bar{P}$  löst  $\text{MP}(a, b, \bar{P} \circ \bar{X}_0^{-1})$ .)

Konstruiere analog  $\bar{Q}$  (ersetze jeweils  $P$  durch  $Q$  in obiger Konstruktion),  $\bar{Q} \circ \bar{X}^{-1}$  löst  $\text{MP}(a, b, \bar{Q} \circ \bar{X}_0^{-1})$

Für  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ist

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{X}_0 \in B) &= \frac{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_{j-1}} \in B_{j-1}, X_{s_j} \in B_j \cap B)}{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j)} \\ &= \frac{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_{j-1}} \in B_{j-1}, X_{s_j} \in B_j \cap B)}{P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j)} = \bar{Q}(\bar{X}_0 \in B) \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme, d.h.  $\bar{P} \circ \bar{X}_0^{-1} = \bar{Q} \circ \bar{X}_0^{-1}$ .

Nach Voraussetzung (A.2) gilt für  $s_{j+1} > s_j$

$$\bar{P} \circ \bar{X}_{s_{j+1}-s_j}^{-1} = \bar{Q} \circ \bar{X}_{s_{j+1}-s_j}^{-1}$$

also für bel.  $B_{j+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j} \in B_j, X_{s_{j+1}} \in B_{j+1}) = Q(X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_j}, X_{s_{j+1}} \in B_{j+1} \in B_j),$$

d.h. (A.3) gilt für  $j + 1$ . □

**Bem.** Dasselbe Argument kann man verwenden um zu zeigen, dass unter Vor. (A.2) eine Lösung – falls existent – die (schwache) Markoveigenschaft besitzt.

Es kommt bei diesem Argument nicht auf die Form von  $L$  als Differentialoperator an – insoweit ist es ein abstraktes Argument, das genauso mit dem Generator irgendeines Markovprozesses funktionieren würde.

Der folgende Satz zeigt den fundamentalen Zusammenhang zwischen Markovprozessen und Martingalproblemen.

**Satz A.4.** *Das Martingalproblem  $\text{MP}(a, b)$  zu  $a, b$  sei wohlgestellt, d.h. für alle  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  besitzt  $\text{MP}(a, b, \mu)$  eine eindeutige Lösung.*

$P_x$  sei die (eindeutige) Lösung von  $\text{MP}(a, b, \delta_x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , setze

$$S_t f(x) := \int f(X_t) P_x(dX) \quad (= E_x[f(X_t)]), \quad x \in \mathbb{R}^d, f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschr., m.b.}$$

Dann gilt für jede endliche Stoppzeit  $\tau$  (und  $x \in \mathbb{R}^d, f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschr., m.b.)

$$E_x[f(X_{\tau+t}) | \mathcal{F}_\tau] = S_t f(X_\tau) \quad (= E_{X_\tau}[f(X_t)]), \quad (\text{A.4})$$

insbes. ist  $(X, (P_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$  ein starker Markovprozess.

*Beweis von Satz A.4.* Anmerkung: Wir verwenden ohne Beweis, dass  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto P_x \in \mathcal{M}_1(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$  messbar ist (vgl. z.B. Exercise 6.7.4 in D. Stroock und S.R.S. Varadhan, *Multi-dimensional diffusion processes*, Springer, 1979).

Wir nehmen zunächst an, dass  $\tau$  beschränkt ist.

Sei  $P$  eine beliebige Lösung von  $\text{MP}(a, b)$  (z.B.  $P = P_x$  für ein  $x \in \mathbb{R}^d$ ),  $A \in \mathcal{F}_\tau$  mit  $P(A) > 0$ , definiere

$$P_1(\tilde{B}) := \frac{\mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A P_{X_\tau}(\tilde{B})]}{P(A)}, \quad \tilde{B} \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \text{ m.b.}$$

Es gilt für  $0 \leq t_0 < \dots < t_m \leq t < t+h$ ,  $g_0, g_1, \dots, g_m: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. und messbar mit

$$\eta(X) := (f(X_{t+h}) - f(X_t) - \int_t^{t+h} Lf(X_u) du) g_0(X_{t_0}) \cdots g_m(X_{t_m})$$

(vgl. Bem. A.2)

$$E_1[\eta(X)] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P \left[ \underbrace{\mathbf{1}_A \int_{C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)} \eta(Y) P_{X_\tau}(dY)}_{=0} \right] = 0,$$

d.h.  $P_1$  löst  $\text{MP}(a, b)$ .

Sei

$$P_2(\tilde{B}) := \frac{\mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\tilde{B}}((X_{\tau+u})_{u \geq 0})]}{P(A)}, \quad \tilde{B} \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \text{ m.b.},$$

es ist

$$\begin{aligned} E_2[\eta(X)] &= \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A \eta((X_{\tau+u})_{u \geq 0})] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P \left[ \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A \eta((X_{\tau+u})_{u \geq 0}) \mid \mathcal{F}_{\tau+t}] \right] \\ &= \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P \left[ \mathbf{1}_A g_0(X_{\tau+t_0}) \cdots g_m(X_{\tau+t_m}) \underbrace{\mathbb{E}^P \left[ (f(X_{\tau+t+h}) - f(X_{\tau+t}) - \int_{\tau+t}^{\tau+t+h} Lf(X_u) du) \mid \mathcal{F}_{\tau+t} \right]}_{=0 \text{ (optional stopping)}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(denn  $\tau + t$  ist n. Vor. eine beschränkte Stoppzeit), d.h. auch  $P_2$  löst  $\text{MP}(a, b)$ .

Weiter ist

$$P_1(X_0 \in B) = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A P_{X_\tau}(X_0 \in B)] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{X_\tau \in B\}}] = P_2(X_0 \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Dies impliziert (denn n. Vor. ist  $\text{MP}(a, b)$  wohlgestellt)

$$P_1 = P_2, \quad \text{d.h. } \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A P_{X_\tau}(\tilde{B})] = \mathbb{E}^P[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\tilde{B}}((X_{\tau+t})_{t \geq 0})], \quad A \in \mathcal{F}_\tau, \tilde{B} \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \text{ m.b.},$$

was die Behauptung ergibt.

Wenn  $\tau$  endlich, aber nicht notwendig beschränkt ist, wird im Beweis, dass  $E_2[\eta(X)] = 0$  gilt, noch ein Approximationsargument benötigt:

Betrachte  $\tau_N := \tau \wedge N$  (dies ist beschr. Stoppzeit) und  $M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_u) du$  erfüllt

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |M_{\tau_N+t+h}^f - M_{\tau_N+t}^f| \leq C_f(1+h),$$

demnach mit dominierter Konvergenz

$$M_{\tau_N+t+h}^f - M_{\tau_N+t}^f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^1(P)} M_{\tau+t+h}^f - M_{\tau+t}^f,$$

somit

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^P \left[ (f(X_{\tau+t+h}) - f(X_{\tau+t}) - \int_{\tau+t}^{\tau+t+h} Lf(X_u) du) \mid \mathcal{F}_{\tau+t} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^P \left[ (f(X_{\tau_N+t+h}) - f(X_{\tau_N+t}) - \int_{\tau_N+t}^{\tau_N+t+h} Lf(X_u) du) \mid \mathcal{F}_{\tau+t} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} M_{(\tau_N+t+h) \wedge (\tau+t)}^f - M_{(\tau_N+t) \wedge (\tau+t)}^f = 0. \end{aligned}$$

□

**Korollar A.5.** Die eindeutige (starke oder schwache) Lösung  $X$  einer (autonomen) SDGL

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$$

ist ein starker Markovprozess.

**Bem.** [Dies gilt insbes. unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 ( $b, \sigma$  Lipschitz) oder von Satz 3.17. Der Generator der zugehörigen Markov-Halbgruppe (im Sinne der Funktionalanalysis) ist dann  $Lf(x) = b(x) \cdot \nabla f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_i \partial_j f(x)$ .

## A.1 Dualität

Für die Frage nach der Eindeutigkeit eines Martingalproblems ist angesichts Prop. A.3 Dualität oft ein nützliches und wichtiges Werkzeug.

**Definition A.6.**  $X^{(x)} = (X_t^{(x)})_{t \geq 0}$ ,  $x \in E$  und  $Y^{(y)} = (Y_t^{(y)})_{t \geq 0}$ ,  $y \in E'$  Familien von stochastischen Prozessen mit Werten in  $E$  bzw. in  $E'$  ( $E, E'$  seien polnische Räume, sagen wir), es gelte  $X_0^{(x)} = x$ ,  $Y_0^{(y)} = y$  f.s.  $X$  und  $Y$  heißen *dual* mit *Dualitätsfunktion*  $H : E \times E' \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn gilt

$$\mathbb{E}[H(X_t^{(x)}, y)] = \mathbb{E}[H(x, Y_t^{(y)})] \quad \forall t \geq 0, x \in E, y \in E'.$$

(Wir nehmen an, dass  $H$  geeignete Messbarkeits- und Beschränktheits-/Wachstumsannahmen erfüllt, so dass die betrachteten Erwartungswerte existieren.)

**Satz A.7.** Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  existiere eine Lösung von  $\text{MP}(a, b, \delta_x)$ , es gebe eine Familie  $Y^{(y)}$ ,  $y \in E'$  von Markovprozessen mit Werten in  $E'$  und  $Y_0^{(y)} = y$ ,  $H : \mathbb{R}^d \times E' \rightarrow \mathbb{C}$  m.b. so dass  $\mathbb{E}[|H(x, Y_t^{(y)})|] < \infty$  für  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in E'$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\{H(\cdot, y), y \in E'\} \quad \text{sei trennend für } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d),$$

(d.h.  $\int_{\mathbb{R}^d} H(x, y) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} H(x, y) \nu(dx)$  für alle  $y \Rightarrow \mu = \nu$ ) und für jede Lösung  $X^{(x)}$  von  $\text{MP}(a, b, \delta_x)$  gelte

$$\mathbb{E}[H(X_t^{(x)}, y)] = \mathbb{E}[H(x, Y_t^{(y)})] \quad \forall t \geq 0, y \in E'. \quad (\text{A.5})$$

Dann ist  $\text{MP}(a, b)$  wohlgestellt.

*Beweis.* Seien  $X^{(x)}, \tilde{X}^{(x)}$  Lösungen von  $\text{MP}(a, b)$

$$\stackrel{(\text{A.5})}{\Rightarrow} \mathbb{E}[H(\tilde{X}_t^{(x)}, y)] = \mathbb{E}[H(X_t^{(x)}, y)] = \mathbb{E}[H(x, Y_t^{(y)})] \quad \forall t \geq 0, y \in E'$$

$H(\cdot, y), y \in E'$

trennend

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X_t^{(x)}) = \mathcal{L}(\tilde{X}_t^{(x)}) \quad \forall t \geq 0$$

Prop. A.3

$$\Rightarrow \text{Lösung eindeutig, d.h. } X^{(x)} \stackrel{d}{=} \tilde{X}^{(x)}.$$

(Strenggenommen braucht es hier noch einen kleinen „Schlenker“, da Prop. A.3 die Eindeutigkeit der 1-dim. Marginalverteilungen bei beliebiger Startverteilung voraussetzt (nicht nur bei Dirac-Verteilungen), formal: bedinge auf  $X_0$  bzw.  $\tilde{X}_0$  und verwende dann reguläre Versionen der bedingten Verteilungen.)  $\square$

## Beispiel: Wright-Fisher-Diffusion und Kingman-Koaleszent

Die Lösung  $(X_t)_{t \geq 0}$  der SDgl

$$dX_t = \mathbf{1}_{[0,1]}(X_t) \sqrt{\gamma X_t(1-X_t)} dB_t \quad (\text{A.6})$$

mit  $\gamma > 0$ ,  $X_0 = x_0 \in [0, 1]$ ,  $(B_t)_{t \geq 0}$  Brownsche Bewegung heißt die (neutrale 2-Typ-) Wright-Fisher-Diffusion<sup>1</sup>. Sie ist ein fundamentales Modell der (theoretischen) Populationsgenetik zur Beschreibung des Anteilsprozesses eines genetischen Typs in einer zwei-Typ-Population konstanter Größe unter Einfluss von Zufälligkeiten im Fortpflanzungserfolg (sogenannte „genetische Drift“).

**Bem.** Die Funktion  $\sigma(x) = \sqrt{x(1-x)}$  ist nicht Lipschitz-stetig, erfüllt aber die Bedingungen von Satz 3.17 (Yamada-Watanabe-Kriterium), somit besitzt (A.6) eine eindeutige (sogar: starke) Lösung und beschreibt insbesondere einen Markovprozess.

Wir bräuchten also nicht Satz A.7 für die Eindeutigkeit des zug. Martingalproblems zu verwenden, aber mittels Dualität lassen sich hier Eigenschaften der Lösung (etwa Momente von  $X_t$ ) leicht recht explizit bestimmen.

Seine Macht zeigt der Dualitätsansatz hier (erst) in der mehrdimensionalen (=multi-Kolonie) Situation im nächsten Abschnitt.

**Bem.** Es gilt  $X_t \in [0, 1]$  für alle  $t \geq 0$ .

(Wir können also „salopp“ schreiben  $dX_t = \sqrt{\gamma X_t(1-X_t)} dB_t$ , sofern  $X_0 \in [0, 1]$ .)

*Beweis.* Sei  $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin [0, 1]\}$ ,  $\tilde{X}_t := X_{t \wedge \tau}$  der gestoppte Prozess, wegen Pfadstetigkeit gilt  $\tilde{X}_t \in [0, 1]$  für alle  $t \geq 0$  und  $\tilde{X}_t \in \{0, 1\}$  für  $t \geq \tau$ . Es ist (mit Prop. 2.38, 4) für (\*)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t = X_{t \wedge \tau} &= x_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \mathbf{1}_{[0,1]}(X_s) \sqrt{\gamma X_s(1-X_s)} dB_s \stackrel{(*)}{=} x_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \mathbf{1}_{[0,1]}(\tilde{X}_s) \sqrt{\gamma \tilde{X}_s(1-\tilde{X}_s)} dB_s \\ &= x_0 + \int_0^t \mathbf{1}_{[0,1]}(\tilde{X}_s) \sqrt{\gamma \tilde{X}_s(1-\tilde{X}_s)} dB_s \end{aligned}$$

(denn  $\int_{t \wedge \tau}^t \mathbf{1}_{[0,1]}(\tilde{X}_s) \sqrt{\gamma \tilde{X}_s(1-\tilde{X}_s)} dB_s = 0$ ), somit ist  $\tilde{X}$  ebenfalls Lösung von (A.6), aus Eindeutigkeit folgt (insbes.)  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\tilde{X})$  und somit  $\tau = \infty$  f.s.  $\square$

**Zur Dualität** Sei  $(Y_t)_{t \geq 0}$  zeitkontinuierliche Markovkette auf  $\mathbb{N}$  mit Sprungratenmatrix  $Q = (Q_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ ,

$$Q_{m,n} = \begin{cases} \gamma \binom{m}{2}, & n = m - 1, \\ -\gamma \binom{m}{2}, & n = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dies ist der sog. Blockzählprozess des Kingman-Koaleszenten.)

$X$  und  $Y$  sind dual bezüglich  $H(x, n) := x^n$  ( $x \in [0, 1]$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ), d.h. es gilt

$$\mathbb{E}[(X_t)^n | X_0 = x] = \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n], \quad t \geq 0, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.7})$$

<sup>1</sup>nach Sewall Wright (1889–1988) und Ronald A. Fisher (1890–1962)

*Beweis.* Sei  $f_{x,n}(t) := \mathbb{E}[(X_t)^n | X_0 = x]$ ,  $g_{x,n}(t) := \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n]$ . Mit Itô-Formel ist

$$(X_t)^n - x^n - \frac{1}{2} \int_0^t n(n-1)(X_s)^{n-2} \gamma X_s(1-X_s) ds = \int_0^t n X_s \sqrt{\gamma X_s(1-X_s)} dB_s$$

ein Martingal. Wir nehmen den Erwartungswert und finden ein Gleichungssystem für  $f_{x,n}(\cdot)$ : Für  $t \geq 0$  ist

$$f_{x,1}(t) = x, \quad f_{x,n}(t) = x^n + \gamma \binom{n}{2} \int_0^t (f_{x,n-1}(s) - f_{x,n}(s)) ds \quad \text{für } n \geq 2. \quad (\text{A.8})$$

Dies ist ein System linearer Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} f_{x,n}(t) = \gamma \binom{n}{2} (f_{x,n-1}(t) - f_{x,n}(t)),$$

das eindeutig rekursiv (bzgl.  $n$ ) lösbar ist.

Andererseits löst  $g_{x,n}(t) = \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n]$  (wegen der Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen, vgl. z.B. [Ka, Thm. 12.22] oder auch Stochastik II, WS 14/15, Aufgabe 6.2) ebenfalls

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{x,n}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n] = \sum_k Q_{nk} \mathbb{E}[x^{Y_t^{(k)}}] = \gamma \binom{n}{2} (\mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n-1] - \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = n]) \\ &= \gamma \binom{n}{2} (g_{x,n-1}(t) - g_{x,n}(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

und wegen  $\mathcal{L}(Y_t | Y_0 = 1) = \delta_1$  (siehe die Form der Sprungraten) ist  $g_{x,n}(t) = x$ , somit gilt  $g_{x,n}(t) = f_{x,n}(t)$ , d.h. (A.7) gilt.  $\square$

Insbesondere ist  $\mathbb{E}[X_t | X_0 = x] = x$ ,

$$\mathbb{E}[(X_t)^2 | X_0 = x] = \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = 2] = x^2 \mathbb{P}(Y_t = 2 | Y_0 = 2) + x \mathbb{P}(Y_t = 1 | Y_0 = 2) = x^2 e^{-\gamma t} + x(1 - e^{-\gamma t}),$$

also

$$\text{Var}[X_t | X_0 = x] = E[(X_t)^2 | X_0 = x] - x^2 = (1 - e^{-\gamma t})x(1 - x)$$

und die „erwartete Heterozygotität“ zur Zeit  $t$  ist

$$\mathbb{E}[2X_t(1 - X_t) | X_0 = x] = 2x(1 - x)e^{-\gamma t}.$$

## Beispiel: Interagierende Wright-Fisher-Diffusionen und strukturierter Kingman-Koaleszent

Wir betrachten den  $N$ -dimensionalen Prozess  $(X_t(1), \dots, X_t(N))_{t \geq 0}$ , Lösung von

$$dX_t(i) = \sqrt{\gamma X_t(i)(1 - X_t(i))} dB_t(i) + \sum_{j=1}^N m(j, i)(X_t(j) - X_t(i)) dt, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.10})$$

$(m(i, j))_{i, j=1, \dots, N}$  „Migrationsratenmatrix“, es gelte  $\sum_{j \neq i} m(i, j) = \sum_{j \neq i} m(j, i)$  (und o.E.  $\sum_j m(i, j) = 0$ ), wobei  $(B_t(1))_{t \geq 0}, \dots, (B_t(N))_{t \geq 0}$   $N$  u.a. Brownbewegungen.

**Bem.** Man kann zeigen, dass  $(X_t(1), \dots, X_t(N)) \in [0, 1]^N$  für alle  $t \geq 0$  gilt, sofern es für  $t = 0$  erfüllt ist.

Sei  $(Y_t)$  zeitkont. Markovkette auf  $E' = (\mathbb{N}_0)^N$ , Sprungratenmatrix (wir schreiben  $E' \ni y = (y(i))_{i \in S}$ , etc.)

$$Q_{y,y'} = \begin{cases} y(i)m(j, i), & \text{falls } y' = y - \mathbf{1}_{\{i\}} + \mathbf{1}_{\{j\}} \text{ für gewisse } i \neq j, \\ \gamma \binom{y(i)}{2}, & \text{falls } y' = y - \mathbf{1}_{\{i\}} \text{ für ein } i, \\ \sum_i (y(i)m(i, i) - \gamma \binom{y(i)}{2}), & \text{falls } y' = y, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.II})$$

**Zur Dualität** Für  $x \in [0, 1]^N, y \in (\mathbb{N}_0)^N$  sei

$$H(x, y) := x^y := \prod_{i=1}^N x(i)^{y(i)}.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X_t^y | X_0 = x] = \mathbb{E}[H(X_t, y) | X_0 = x] = \mathbb{E}[H(x, Y_t) | Y_0 = y] = \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = y] \quad (\text{A.I2})$$

*Beweis.* Sei

$$\begin{aligned} f_{x,y}(t) &:= \mathbb{E}[(X_t)^y | X_0 = 0] = \mathbb{E}[H(X_t, y) | X_0 = x], \\ g_{x,y}(t) &:= \mathbb{E}[x^{Y_t} | Y_0 = 0] = \mathbb{E}[H(x, Y_t) | Y_0 = y] \end{aligned}$$

für  $x \in [0, 1]^N, y \in (\mathbb{N}_0)^N$ . Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x(i)} H(x, y) = y(i)x^{y-1_{\{i\}}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x(i)^2} H(x, y) = 2 \binom{y(i)}{2} x^{y-2\mathbf{1}_{\{i\}}},$$

mit Itô-Formel ist also

$$\begin{aligned} X_t^y - X_0^y - \int_0^t \sum_{i,j=1}^N y(i)m(j, i)(X_s(j) - X_s(i))X_s^{y-1_{\{i\}}} ds \\ - \sum_{i=1}^N \int_0^t \gamma \binom{y(i)}{2} X_s^{y-2\mathbf{1}_{\{i\}}} X_s(i)(1 - X_s(i)) ds \end{aligned}$$

ein Martingal. Nehme Erwartungswerte und erhalte

$$\begin{aligned} f_{x,y}(t) &= x^y + \int_0^t \sum_{i,j=1}^N y(i)m(j, i)(f_{x,y-1_{\{i\}}+1_{\{j\}}}(s) - f_{x,y}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \gamma \sum_{i=1}^N \binom{y(i)}{2} (f_{x,y-1_{\{i\}}}(s) - f_{x,y}(s)) ds \end{aligned} \quad (\text{A.I3})$$

(mit Randbedingung  $f_{x,(0,0,\dots,0)}(t) \equiv 1$ ). Dieses lineare (Differential-)Gleichungssystem (hier in integrierter Form notiert) lässt sich – wenigstens im Prinzip – mit Induktion über  $\sum_{i=1}^N y(i)$  eindeutig lösen.

Andererseits löst  $g_{x,y}(t)$  (wiederum wegen der Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen) ebenfalls

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_{x,y}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbb{E}[H(x, Y_t) | Y_0 = y] = \sum_{y' \in (\mathbb{N}_0)^N} Q_{y,y'} \mathbb{E}[H(x, Y_t) | Y_0 = y'] \\ &= \sum_{i,j=1}^N y(i)m(j,i)(g_{x,y-\mathbf{1}_{\{i\}}+\mathbf{1}_{\{j\}}}(s) - g_{x,y}(s)) + \sum_{i=1}^N \gamma\binom{y(i)}{2}(g_{x,y-\mathbf{1}_{\{i\}}}(s) - g_{x,y}(s)) \end{aligned} \tag{A.14}$$

(mit Startwerten  $g_{x,y}(0) = x^y$  und Randbedingung  $g_{x,(0,0,\dots,0)}(t) \equiv 1$ ). Somit gilt  $g_{x,y}(t) = f_{x,y}(t)$ , d.h. (A.12).  $\square$

Da die Funktionenfamilie  $H(\cdot, y)$ ,  $y \in (\mathbb{N}_0)^N$  trennend für  $\mathcal{M}_1([0, 1]^N)$  ist, ist nach Satz A.7 die Lösung von (A.10) (zumindest in Verteilung) eindeutig.

# Literaturverzeichnis

- [Du] R. Durrett, Stochastic calculus : a practical introduction, CRC Press, 1996.
- [EK] S.N. Ethier, T.G. Kurtz, Markov processes: characterization and convergence, Wiley, 1986.
- [Ka] O. Kallenberg, Foundations of modern probability, 2nd ed., Springer, 2002.
- [KS] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, 2nd ed., Springer, 1991.
- [Kl] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., Springer 2020.
- [LG] J.-F. Le Gall, Brownian motion, martingales, and stochastic calculus, Springer, 2016.
- [MP10] P. Mörters, Y. Peres, Brownian motion, Cambridge University Press, 2010.
- [Ø] B. Øksendal, Stochastic differential equations, 6th ed., Springer, 2003.
- [Pr] P. Protter, Stochastic integration and differential equations, 2nd ed., Springer, 2005.
- [RY] D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, 3rd ed., Springer, 1999.
- [RW] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov processes and martingales, Band I und II, Wiley, 1994.
- [St2] M. Birkner, Notizen zur Stochastik II, JGU Mainz, WS 2021/22.