Prof. Dr. Matthias Birkner — JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen — **SS 2025**

Blatt 0

Aufgabe 0.1 a) Sei X irreduzible diskrete Markovkette auf E. Es gebe eine Funktion $\varphi : E \to [0, \infty)$ mit $\varphi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ (in dem Sinne, dass $\#\{x \in E : \varphi(x) \leqslant M\} < \infty$ für jedes $M \in (0, \infty)$ gilt) und eine endliche Teilmenge $F \subset E$, so dass

$$\mathbb{E}_x\big[\varphi(X_1)\big] \leqslant \varphi(x) \quad \text{für alle } \ x \in E \backslash F.$$

Zeigen Sie: Dann ist X rekurrent.

[*Hinweis.* Sei $\tau := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in F\}$ und $T_M := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(X_n) \geqslant M\}$. Benutzen Sie die Tatsache, dass $(\varphi(X_{n \wedge \tau}))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal ist, um $\mathbb{P}_x(T_M < \tau)$ abzuschätzen und folgern Sie mittels $M \to \infty$, dass $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ für jedes $x \in E$.]

b) Wenn man in a) die Bedingung $\varphi \to \infty$ durch $\varphi \to 0$ ersetzt (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\#\{x \in E : \varphi(x) \geqslant \varepsilon\} < \infty$) und $\min_{x \in F} \varphi(x) > 0$ gilt, so ist X transient.

c) Sei X diskrete Markovkette auf $\mathbb{Z}_+$ mit Übergangsmatrix p, wobei

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = 0, j = 1, \\ r_i, & i > 0, j = i+1, \\ 1 - r_i, & i > 0, j = i-1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für gewisse $r_i \in (0,1)$ (eine solche Kette heißt auch ein Geburts- und Todesprozess).

Es gelte $r_n = \frac{1}{2} + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \sim c/n^\alpha$ für ein $c > 0$ und $\alpha \in [0, \infty)$. Zeigen Sie: X ist rekurrent für $\alpha > 1$ und transient für $\alpha < 1$. (Falls Sie möchten: wie sieht es im Fall $\alpha = 1$ aus?)

[*Hinweis.* Die Funktion $\varphi(0) := 0, \varphi(\ell) := \sum_{m=0}^{\ell-1} \prod_{j=1}^{m} \frac{1-r_j}{r_j}$ für $\ell \in \mathbb{N}$ (wobei für $m = 0$ das „leere" Produkt als 1 interpretiert wird), ist auf $\{1, 2, \dots\}$ harmonisch für X.]

Aufgabe 0.2 (Wartezeitparadoxon, diskreter Fall) Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{N}$, es gelte $\mathrm{ggT}\{j : \mathbb{P}(\xi_1 = j) > 0\} = 1$ und $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Wir setzen $T_0 := 0$, $T_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$N_n := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : T_k \leqslant n\} \quad \text{und} \quad W_n := \xi_{N_n+1} \ \big(= \min\{T_k : T_k > n\} - \max\{T_k : T_k \leqslant n\}\big).$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(W_n = \ell) = \frac{\ell}{\mathbb{E}[\xi_1]} \mathbb{P}(\xi_1 = \ell).$$

[*Hinweis.* Sei $X_n := \inf\{T_k - n : k \in \mathbb{N}_0, T_k \geqslant n\}$. $(W_n, X_n)_n$ ist eine Markovkette, bestimmen Sie die invariante Verteilung.]

Aufgabe 0.3 (Eine Version von Poincarés Wiederkehrsatz) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \tau)$ ein maßerhaltendes dynamisches System, für $A \in \mathcal{A}$ sei $T_A^1 := \inf\{n > 0 : \tau^n(\omega) \in A\}$.

a) Es gilt $A \subset \{T_A^1 < \infty\}$ $\mathbb{P}$-f.s. und $A \subset \{\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\}$ $\mathbb{P}$-f.s.

[*Hinweis.* Sei $B := A \cap \{T_A^1 = \infty\}$, dann sind die Mengen $\tau^{-k}(B)$, $k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt mit $\mathbb{P}(\tau^{-k}(B)) = \mathbb{P}(B)$.]

b) Sei τ darüberhinaus ergodisch und $\mathbb{P}(A) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}\big(\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\big) = 1.$$

[*Hinweis.* $C := \{\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\}$ ist τ-invariant, und $A \subset C$ $\mathbb{P}$-f.s. nach Teil a).]

b.w.

Aufgabe 0.4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\mathbb{Z}$-wertiger stationärer Prozess mit $X_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = 0$ und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$ (sowie $S_0 = 0$).

a) Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| = 0$$

b) Sei $A = \{S_n \neq 0 \text{ für alle } n \geqslant 1\}$. Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{P}(A) = 0$.

c) Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $\sigma_m := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_{m+n} = S_m\}$. Zeigen Sie: $\mathbb{P}(\sigma_m < \infty) = 1$.

d) Folgern Sie:

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ für unendliche viele } n) = 1$$

[*Hinweise.* a) und b) Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Tatsachen, dass $S_n/n \to 0$ und $n^{-1}\#\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \to \mathbb{P}(A \mid \mathcal{I})$ f.s. gilt.

c) Verwenden Sie $\{\sigma_0 = \infty\} = A$ und Stationarität.

d) Es ist $\bigcap_{m=0}^{\infty}\{\sigma_m < \infty\} \subset \{S_n = 0 \text{ für unendliche viele } n\}$.

Übrigens: Die Aussage in d) verallgemeinert den Satz von Chung-Fuchs, der besagt, dass jede zentrierte Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ rekurrent ist.]