

Aufgabe 1.1 (eine Pralinschachtel zur Brownschen Bewegung) Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung und $B_t := W_t - tW_1$, $t \in [0, 1]$. Beweisen Sie einige (oder wenn Sie möchten auch alle) der folgenden Aussagen:

1. $(B_t)_{t \in [0,1]}$ ist ein zentrierter Gaußscher Prozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = (s \wedge t)(1 - (s \vee t)), \quad s, t \in [0, 1]$$

$((B_t)_{t \in [0,1]}$ ist eine *Brownsche Brücke*.)

2. $(B_t)_{t \in [0,1]}$ und W_1 sind unabhängig.

3. $\mathcal{L}((W_t)_{0 \leq t \leq 1} \mid |W_1| < \varepsilon) \implies \mathcal{L}((B_t)_{0 \leq t \leq 1})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. $((1+t)B_{t/(1+t)})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} ((1+t)B_{1/(1+t)})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (W_t)_{t \geq 0}$.

5. Sei $\tilde{B}_t := (1-t)W_{t/(1-t)}$, $t \in [0, 1]$. Es gilt $(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} (\tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$

6. Zeitumkehr: $\tilde{W}_t := W_{1-t} - W_1$, $0 \leq t \leq 1$ ist ebenfalls BB, weiterhin ist

$$(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} (B_{1-t})_{t \in [0,1]}$$

7. Sei $X_t := e^{-t}W_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}$. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\text{Cov}[X_s, X_t] = \exp(-|t-s|)$. X ist stationär, d.h. $X \stackrel{d}{=} (X_t)_{t+h \in \mathbb{R}}$ für jedes $h \in \mathbb{R}$.

(X ist ein (stationärer) *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*.)

Aufgabe 1.2 Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine standard-Brownsche Bewegung.

- a) Zeigen Sie: Für jedes $t > 0$ ist

$$\mathbb{P}(t \text{ ist ein lokales Minimum von } B) = \mathbb{P}(t \text{ ist ein lokales Maximum von } B) = 0$$

- b) Argumentieren Sie: Für $0 < a < b < \infty$ ist

$$\mathbb{P}(B \text{ hat ein lokales Minimum in } (a, b)) = \mathbb{P}(B \text{ hat ein lokales Maximum in } (a, b)) = 1$$

Aufgabe 1.3 (4+4+4 Punkte) a) (für Freunde der partiellen Integration) Für $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und differenzierbares $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$$

(sofern $Zf(Z)$ und $f'(Z)$ integrierbar sind), insbesondere gilt

$$\mathbb{E}[Z^{2n}] = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- b) (zweiseitige Brownbewegung) Zeigen Sie, dass es für $x \in \mathbb{R}$ einen stochastischen Prozess $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gibt mit stetigen Pfaden, unabhängigen Inkrementen, $B_0 = x$ und der Eigenschaft $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$, $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

- c) (Rotationsinvarianz der d -dimensionalen Brownbewegung) Sei $B = (B_t)_{t \geq 0} = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})_{t \geq 0}$ eine d -dimensionale standard-Brownbewegung und $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine orthogonale Matrix. Dann ist auch $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ mit $\tilde{B}_t = MB_t$, $t \geq 0$ eine d -dimensionale standard-Brownbewegung.

b.w.

Aufgabe 1.4 (Die Pfade der Brownschen Bewegung sind nirgends differenzierbar, 12 Punkte) Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine 1-dim. standard-Brownsche Bewegung, für $a, T > 0, n \in \mathbb{N}$ sei

$$D_{a,T} := \{f \in C([0, \infty)) : f \text{ ist an einer Stelle } t < T \text{ differenzierbar mit } |f'(t)| < a\},$$

$$L_{a,T,n} := \bigcup_{1 \leq k < nT} \bigcap_{\ell=1}^5 \left\{ f \in C([0, \infty)) : \left| f\left(\frac{k+\ell}{n}\right) - f\left(\frac{k+\ell-1}{n}\right) \right| \leq \frac{10a}{n} \right\}$$

Zeigen Sie:

1. $D_{a,T} \subset \tilde{D}_{a,T} := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} L_{a,T,n},$
2. $\mathbb{P}(W \in L_{a,T,n}) \leq Tn(10a/\sqrt{n})^5$
3. und folgern Sie, dass $\mathbb{P}(W \in D_{a,T}) = 0.$