Aufgabe 2.1 Schauen Sie sich den R-Code `reskalierte_MK_und_Diffusionen.R` an, der auf der Webseite der Vorlesung zu finden ist und lassen Sie ihn auf Ihrem Rechner laufen. Lesen Sie auch die Kommentare im Code.

Aufgabe 2.2 („Ernte“ aus der Brownschen Bewegung abgeleiteter Martingale, 3+3+6+6 Punkte) Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie: $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal und für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t))_{t \geq 0}$ ein Martingal, und für $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

c) Folgern Sie aus b): τ_a ist (einseitig strikt) stabil zum Index 1/2 mit Lévy-Maß

$$\nu(dy) = (|a|/\sqrt{2\pi})y^{-3/2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) dy$$

die Dichte von τ_a ist

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} t^{-3/2}, \quad t > 0.$$

d) Seien $a, b > 0$, $\tilde{\tau}_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t - at = b\}$ ($\tilde{\tau}_{a,b}$ ist Stopzeit mit Werten in $[0, \infty]$). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tilde{\tau}_{a,b}}] = \exp(-ab - b\sqrt{a^2 + 2\lambda}), \quad \lambda \geq 0$$

und folgern Sie

$$\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}, \quad \text{sowie } \sup\{B_t - at : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \text{Exp}(2a).$$

Aufgabe 2.3 (6 Punkte) Sei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. $N_0 = 0$, N hat unabhängige Inkremente ($N_{t+h} - N_t$ ist u.a. von $\mathcal{F}_t := \sigma(N_s : s \leq t)$ für $t, h \geq 0$), $N_{t+h} - N_t \sim \text{Pois}(\lambda h)$ für $t \geq 0, h > 0$.

Dann ist $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal (bezüglich der von $(N_t)_{t \geq 0}$ erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), und ebenso $\tilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t, t \geq 0$.

Aufgabe 2.4 (Kolmogorov-Smirnov-Test und Invarianzprinzip)

a) Seien $Y_1, Y_2, \dots$ u.i.v. $\sim \text{Exp}(1)$, $Z_k := \sum_{i=1}^k Y_i, k \in \mathbb{N}$ und

$$D_n := \max_{k=1, \dots, n} \left| \frac{Z_k}{Z_{n+1}} - \frac{k}{n} \right|$$

Zeigen Sie:

$$\sqrt{n}D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t - tW_1|$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownbewegung ist.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \dots, U_n$ u.i.v. $\sim \text{Unif}([0, 1])$ und $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ die zugehörige Ordnungsstatistik (d.h. die der Größe nach sortierten Werte von $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$). Zeigen Sie

$$(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{Z_1}{Z_{n+1}}, \frac{Z_2}{Z_{n+1}}, \dots, \frac{Z_n}{Z_{n+1}} \right)$$

mit $Z_1, Z_2, \dots$ aus Teil a).

c) Sei X eine reelle Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$, $u \in [0, 1]$ die zugehörige (linksstetige) inverse Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: $F(X) \sim \text{Unif}([0, 1])$ und $F(F^{-1}(u)) = u$, $0 \leq u \leq 1$.

d) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.a. Kopien der Zufallsvariable X aus c) und

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

die zugehörige (n -te) empirische Verteilungsfunktion. Warum gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| = \sup_{0 < u < 1} \left| \hat{F}_n(F^{-1}(u)) - u \right| = \sup_{0 < u < 1} \left| \hat{F}_n^*(u) - u \right|$$

mit $\hat{F}_n^*(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(F(X_i) \leq u)$?

e) Seien $n \in \mathbb{N}$, $U_i = F(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ und $U_{(1)} < \dots < U_{(n)}$ die Ordnungsstatistik dieser Werte (mit Setzung $U_{(n+1)} = 1$). Warum ist

$$\begin{aligned} \sup_{0 < u < 1} \left| \hat{F}_n^*(u) - u \right| &= \max_{k=0, \dots, n} \sup \left\{ \left| \frac{k}{n} - u \right| : U_{(k)} \leq u < U_{(k+1)} \right\} \\ &= \max_{k=0, \dots, n} \max \left\{ \left| \frac{k}{n} - U_{(k)} \right|, \left| \frac{k}{n} - U_{(k+1)} \right| \right\} \end{aligned}$$

f) Folgern Sie

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t - tW_1| \quad (1)$$

Übrigens: Die Aussage in (1) ist die theoretische Grundlage des Kolmogorov-Smirnov-Tests, mit dessen Hilfe man die Nullhypothese überprüfen kann, dass eine gegebene Stichprobe von n Beobachtungswerten aus einer vorgegebenen Verteilung mit Verteilungsfunktion F stammt. Es ist bekannt, dass $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t - tW_1| \geq y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2k^2 y^2)$ für $0 < y < 1$ gilt. Damit wird zu gegebenem Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ der jeweilige (asymptotisch korrekte) kritische Wert der Teststatistik $\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right|$ bestimmt.

Übrigens, 2: Die Aussage in (1) impliziert auch die folgende Version des Satzes von Glivenko-Cantelli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{stochastisch}$$

d.h. die $\hat{F}_n(\cdot)$ bilden im u.i.v.-Modell eine konsistente Schätzfolge für die „wahre“ Verteilungsfunktion F der Daten.

[Hinweise. a) Beachten Sie

$$\sqrt{n} \left| \frac{Z_k}{Z_{n+1}} - \frac{k}{n} \right| = \frac{n}{Z_{n+1}} \left| \frac{Z_k - k}{\sqrt{n}} - \frac{k}{n} \frac{Z_{n+1} - n}{\sqrt{n}} \right|$$

und dass $Z_{n+1}/n \rightarrow 1$ (f.s. für $n \rightarrow \infty$) gilt, verwenden Sie dann das Invarianzprinzip.

b) Sie können die Dichtetransformationsformel verwenden oder induktiv die Tatsache ausnutzen, dass für unabhängige Y_1, Y_2 mit $Y_i \sim \text{Gamma}(r_i, \lambda)$, $r_1, r_2, \lambda > 0$ (d.h. Y_i hat Dichte $\frac{\lambda^{r_i}}{\Gamma(r_i)} y^{r_i-1} e^{-\lambda y}$, $y > 0$) gilt

$Y_1 + Y_2$ und $\frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$ sind unabhängig mit $Y_1 + Y_2 \sim \text{Gamma}(r_1 + r_2, \lambda)$, $\frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \sim \text{Beta}(r_1, r_2)$

(d.h. $Y_1/(Y_1 + Y_2)$ hat Dichte $\frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} u^{r_1-1} (1-u)^{r_2-1}$, $0 < u < 1$), siehe z.B. Prop. 9.7 in H.-O. Georgii, *Stochastik*, 5. Aufl., de Gruyter, 2015.

d) und e) Fertigen Sie sich Skizzen an.

Falls Sie irgendwo „stecken bleiben“ sollten: Hilfe finden Sie z.B. in Leo Breiman, *Probability*, SIAM, 1992, Ch. 13.6.]

Aufgabe 2.5 (Zur fraktionalen Brownschen Bewegung) Sei $0 < H < 1$ und

$$C_H(s, t) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass $C_H(\cdot, \cdot)$ positiv semidefinit ist, d.h. für $m \in \mathbb{N}$, und beliebige $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^m C_H(s_j, s_k) u_j u_k \geq 0$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Erweiterungssatzes von Kolmogorov und des Satzes von Kolmogorov-Chentsov: Es gibt einen zentrierten Gauß'schen Prozess $(X_t^{(H)})_{-\infty < t < \infty}$ mit Kovarianzfunktion

$$\text{Cov}[X_s, X_t] = C_H(s, t) \quad \text{für } s < t \in \mathbb{R}$$

dessen Pfade fast sicher Hölder-stetig der Ordnung γ sind für $0 < \gamma < H$.

[*Hinweis.* Für a) dürfen Sie die (in Stochastik II berichtete) Tatsache verwenden, dass für $0 < \alpha \leq 2$ und $c > 0$ die Funktion $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \varphi(\theta) = e^{c|\theta|^\alpha} = \mathbb{E}[e^{i\theta S}]$ die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable S ist (S ist symmetrisch stabil verteilt mit Index α , siehe Beispiel 5.12 der Vorlesungsnotizen zur Stochastik II im WS 24/25).

Folgern Sie, dass $\varphi(\cdot)$ positiv semidefinit ist, d.h. es gilt

$$\sum_{j,k=1}^m u_j u_k \varphi(\theta_j - \theta_k) \geq 0 \quad \text{für } u_1, \dots, u_m, \theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}$$

(betrachten Sie dazu die komplexwertige Zufallsvariable $Y = \sum_{j=1}^m u_j e^{i\theta_j S}$. Was ist $Y \bar{Y}$?)

Betrachten Sie nun $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$, mit **Setzung** $u_0 := -\sum_{j=1}^m u_j$ und $s_0 := 0$, so ist

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (|s_j|^\alpha + |s_k|^\alpha - |s_j - s_k|^\alpha) u_j u_k = - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m |s_j - s_k|^\alpha u_j u_k$$

(beachte $\sum_{j=0}^m u_j = 0$ nach Definition).

Für (sehr kleines) $c > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m e^{-c|s_j - s_k|^\alpha} u_j u_k = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m (e^{-c|s_j - s_k|^\alpha} - 1) u_j u_k \\ &= -c \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m |s_j - s_k|^\alpha u_j u_k + o(c) \quad c \downarrow 0 \end{aligned}$$

Für b) beachten Sie, dass $X_t^{(H)} - X_s^{(H)}$ zentriert normalverteilt ist mit $\text{Var}[X_t^{(H)} - X_s^{(H)}] = C_H(t, t) + C_H(s, s) - 2C_H(s, t)$.