Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen **SS 2025**

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eine standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,\mathbb{P}\big(B_s \leqslant 1 \text{ für alle } 0 \leqslant s \leqslant t\big) = \sqrt{2/\pi}.$$

Aufgabe 3.2 (2+2+2+2 Punkte) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. reellwertige ZVn mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wie muss man die folgenden mit $n \in \mathbb{N}$ indizierten Familien von Zufallsvariablen jeweils normieren, um einen nicht-trivialen Grenzwert in Verteilung zu erhalten?

$$\begin{aligned}
(i) &\quad \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \\
(ii) &\quad \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\} \\
(iii) &\quad S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\
(iv) &\quad \inf\{m \in \mathbb{N} : S_m \geqslant \sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

[Falls Sie möchten: Was können Sie dann jeweils über die Limesverteilung sagen (beispielsweise über deren Dichte, Verteilungsfunktion oder Laplace-Transformierte)?]

Aufgabe 3.3 (6+6 Punkte)

a) Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ standard-Brownsche Bewegung, $\mathcal{Z} := \{t \geqslant 0 : B_t = 0\}$ ihre Nullstellenmenge und λ das Lebesgue-Maß (auf $\mathbb{R}_+$). Es gilt

$$\lambda(\mathcal{Z}) = 0 \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\lambda(\mathcal{Z})]$.]

Weiterhin ist

$\mathcal{Z}$ *perfekt*, d.h. $\mathcal{Z}$ ist abgeschlossen und besitzt keine isolierten Punkte (f.s.).

[*Hinweis.* Sei $R_t := \inf\{u > t : B_u = 0\}$, zeigen Sie mittels der starken Markov-Eigenschaft, dass für jedes $t > 0$ gilt $\mathbb{P}\big(\inf\{s > 0 : B_{R_t+s} = 0\} > 0 \,\big|\, \mathcal{F}_{R_t}\big) = 0$ und folgern Sie

$$\mathbb{P}\Big(\exists\, t, \delta \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \,:\, B_s \neq 0 \text{ für } s \in (R_t, R_t + \delta)\Big) = 0.$$

Folgern Sie weiter: Wenn $0 < u \in \mathcal{Z}$ von links isoliert ist (d.h. es gibt $t \in \mathbb{Q}_+$ mit $(t,u) \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, so gibt es eine strikt absteigende Folge $(u_n)_n \subset \mathcal{Z}$ mit $u_n \downarrow u$.]

Anmerkung: Perfekte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind überabzählbar, vgl. z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Thm. (6.65).

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $0 < \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie: Für $t \in (0,1)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\max\{m < n : S_m S_{m+1} < 0\} \leqslant nt\Big) = \frac{2}{\pi} \arcsin\big(\sqrt{t}\big)$$

[*Hinweis.* Es liegt nahe, die Aussage mittels Donskers Invarianzprinzip aus dem Arcussinus-Gesetz für die Brownsche Bewegung herzuleiten.

Betrachten Sie $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := \sup\{0 \leqslant t \leqslant 1 : f(t) = 0\}$. φ ist nicht stetig auf $C([0,1])$, aber wenn $f \in C([0,1])$ in jeder Umgebung von $\varphi(f)$ strikt positive und strikt negative Werte annimmt, so ist f ein Stetigkeitspunkt von φ. Verwenden Sie Teil a) um zu zeigen, dass der Pfad einer Brownschen Bewegung mit W'keit 1 ein Stetigkeitspunkt von φ ist.]

Aufgabe 3.4 a) (Zur Schwierigkeit eines „naiven“ stochastischen Integrals, etwa bezüglich der Brownschen Bewegung). Sei $g \in C([0,1])$, für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n-1} f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) \in \mathbb{R} \text{ existiert für jedes } f \in C([0,1]) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big|g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big| < \infty.$$

b) (Eine „Baby-Version“ des Young-Integrals) Für $\alpha \in (0,1]$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei $||f||_{C^\alpha} := \sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1} |f(t) - f(s)|/(t-s)^\alpha$ die α-Hölder-Norm und $C^\alpha := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, ||f||_{C^\alpha} < \infty\}$ der Raum der α-Hölder-stetigen Funktionen (auf $[0,1]$).

Seien $\alpha, \beta \in (0,1]$ mit $\alpha + \beta > 1$, $f \in C^\alpha, g \in C^\beta$. Zeigen Sie: Für $S_n(f)$ aus (1) gilt

$$|S_{n+1}(f) - S_n(f)| \leqslant 2^{-\alpha-\beta}||f||_{C^\alpha}||g||_{C^\beta}\, 2^{-(\alpha+\beta-1)n} \tag{2}$$

und folgern Sie, dass

$$S(f) := \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

existiert und

$$\sup\left\{\frac{|S(f)|}{||f||_{C^\alpha}} : 0 < ||f||_{C^\alpha} < \infty\right\} < \infty$$

erfüllt.

[*Hinweis.* a) Fassen Sie die Frage funktionalanalytisch auf: $X := C([0,1])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$, ist ein Banachraum, ebenso $Y := \mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Betrag, $S_n : X \to Y$ ist ein stetiger linearer Operator.

Der Satz von Banach-Steinhaus (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, Cor. (14.24)) besagt: Wenn für jedes $f \in X$ gilt $\sup_n |S_n(f)| < \infty$, so gilt auch $\sup_n ||S_n|| < \infty$, wobei $||S_n|| := \sup_{f\in X,\, f\neq 0} |S_n(f)|/||f||_\infty$ die Abbildungsnorm von S_n bezeichnet.

Konstruieren Sie für jedes n ein $f_n \in C([0,1])$ mit $f_n(k/2^n) = \operatorname{sgn}\big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\big)$ und $||f_n||_\infty \leqslant 1$, was ist dann $S_n(f_n)$?

b) Für (2) beachten Sie, dass

$$\begin{aligned}&\Big\{f\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big(g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big) + f\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big(g\big(\tfrac{2k+2}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big)\Big\} - f\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big(g\big(\tfrac{k+1}{2^n}\big) - g\big(\tfrac{k}{2^n}\big)\Big)\\ &= \Big(f\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big) - f\big(\tfrac{2k}{2^{n+1}}\big)\Big)\Big(g\big(\tfrac{2k+2}{2^{n+1}}\big) - g\big(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}\big)\Big)\end{aligned}$$

gilt.]