Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen **SS 2025**

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (Beweis von Aussagen aus den Vorlesungsnotizen) Seien $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ gegeben durch $H_t = \sum_{k \geqslant 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ (mit einer Stoppzeitenfolge $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ ohne Häufungspunkt im Endlichen und ξ_k beschränkt, $\mathcal{F}_{\tau_k}$-messbar) und analog J mit $J_t = \sum_{k \geqslant 1} \eta_k \mathbf{1}_{(\sigma_k, \sigma_{k+1}]}(t)$ elementare Integranden, sowie $M \in \mathcal{M}_2^c$.

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^t (aH_s + bJ_s)\, dM_s = a \int_0^t H_s\, dM_s + b \int_0^t J_s\, dM_s, \quad t \geqslant 0 \quad \text{f.s.}$$

d.h. das elementare stochastische Integral bezüglich M ist linear.

b) Für $t \geqslant s \geqslant 0$ gilt (mit $\int_s^t H\, dM := \int_0^t H\, dM - \int_0^s H\, dM$)

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t H\, dM \int_s^t K\, dN \,\Big|\, \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u K_u\, d\langle M, N \rangle_u \,\Big|\, \mathcal{F}_s \right] \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst Integranden, die nur aus einer Stufe bestehen, d.h. $H_t = \xi \mathbf{1}_{(\tau, \tau']}(t)$ mit $\tau \leqslant \tau' < \infty$ Stoppzeiten und $\mathcal{F}_\tau$-messbarem, beschränktem ξ.]

Aufgabe 4.2 (8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt, (B_t) Standard-Brownbewegung (somit ist der – deterministische – Prozess $(f(t))_{t \geqslant 0}$ in $\mathcal{L}(B)$) und

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Zeigen Sie: (Z_t) ist ein zentrierter Gauß'scher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$c(s,t) := \mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du, \quad s, t \geqslant 0$$

und $M_t := \exp\left(Z_t - \frac{1}{2} c(t,t)\right)$, $t \geqslant 0$, ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f eine stückweise konstante Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist.]

Aufgabe 4.3 (4+4 Punkte) Sei $(M_t)_{t \geqslant 0}$ ein stetiges Martingal mit $M_0 = 0$, das zugleich ein Gauß'scher Prozess ist, d.h. $(M_{t_1}, M_{t_2}, \ldots, M_{t_n})$ ist multivariat normalverteilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

a) Zeigen Sie: Für $0 \leqslant s < t$ ist $M_t - M_s$ unabhängig von $\sigma(M_r, r \leqslant s)$.

b) Zeigen Sie: Die quadratische Variation von M ist (f.s.) deterministisch, d.h. es gibt eine stetige, nicht-fallende Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $\langle M \rangle_t = f(t)$ für $t \geqslant 0$ f.s.

[*Hinweis.* Was ist die Kovarianz von $M_t - M_s$ und M_r für $r \leqslant s < t$?]

b.w.

Aufgabe 4.4 (2+2+2+2 Punkte) Wir betrachten den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = (0,1]$, $\mathscr{A} = \mathcal{B}((0,1])$, $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(0,1]$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$,

$$\mathcal{F}_t := \big\{A \in \mathscr{A} : A \subset (0,t] \text{ oder } (t,1] \subset A\big\}, \quad 0 < t < 1$$

und $\mathcal{F}_t = \mathscr{A}$ für $t \geqslant 1$ (überzeugen Sie sich, dass $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ tatsächlich eine Filtration bildet).

a) Für $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $t \geqslant 0$ gilt f.s.

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t] = A_t := \begin{cases} Y(\omega), & 0 < \omega \leqslant t, \\ \frac{1}{1-t}\int_{(t,1)} Y(u)\, du, & t < \omega < 1. \end{cases}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie Ereignisse der Form $\{A_t > a\}$ um zu sehen, dass A_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.]

b) Sei die ZV $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $Y(\omega) = 1/\sqrt{\omega}$ und sei $M_t := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geqslant 0$. $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal und es gilt

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{\omega}} 1_{(0,t]}(\omega) + \frac{2}{1+\sqrt{t}} 1_{(t,1]}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

c) Sei T $(= T(\omega))$ eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann

$$\text{gibt es ein } \varepsilon \in (0,1) \text{ mit } T(\omega) \geqslant \omega 1_{(0,\varepsilon)}(\omega).$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst, dass für $\omega_0 \in (0,1)$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T \leqslant \omega_0 - 1/n\} \supset (\omega_0, 1]$, falls $T(\omega_0) < \omega_0$. Führen Sie dann die Annahme, dass $T(\omega_k) < \omega_k$ für eine Folge $\omega_k \downarrow 0$ gilt, zum Widerspruch.]

d) Sei T eine Stoppzeit mit $\mathbb{P}(T > 0) > 0$. Dann gilt $\mathbb{E}[M_T^2] = \infty$ (d.h. M ist kein lokales $\mathcal{L}^2$-Martingal).
[*Hinweis.* Verwenden Sie Teile a) und b) um zu zeigen, dass $\mathbb{E}[M_T^2] \geqslant \int_0^\varepsilon \frac{d\omega}{\omega}$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt.]