Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen **SS 2025**

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (Polynome der Brownschen Bewegung, die Martingale bilden, 10 Punkte) Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, dann sind $(B_t)_{t \geqslant 0}$ und $(B_t^2 - t)_{t \geqslant 0}$ Martingale. Hier geht es um entsprechende Ausdrücke mit höheren Potenzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{He}_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \tag{1}$$

das n-te Hermite-Polynom* (es ist $\mathrm{He}_1(x) = x$, $\mathrm{He}_2(x) = x^2 - 1$, $\mathrm{He}_3(x) = x^3 - 3x$, ...) und

$$M_t^{(n)} := t^{n/2} \mathrm{He}_n(B_t/\sqrt{t}).$$

Zeigen Sie: Es ist $M_t^{(n)} = n \int_0^t M_s^{(n-1)} \, dB_s$, also

$$M_t^{(n)} = n! \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \ldots dB_{s_2} \, dB_{s_1}$$

und $(M_t^{(n)})_{t \geqslant 0}$ ist ein Martingal.

[*Hinweise.* Sei $f_n(x,y) := y^{n/2} \mathrm{He}_n(x/\sqrt{y})$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ (stetig fortgesetzt mit $f_n(x,0) = x^n$), dann gilt $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_n + \frac{\partial}{\partial y} f_n = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} f_n = n f_{n-1}$. Verwenden Sie die zeitabhängige Itō-Formel. Für die Martingaleigenschaft zeigen Sie (z.B. mit dem Spiegelungsprinzip), dass $\mathbb{E}\big[\sup_{s \leqslant t} |B_s|^p\big] < \infty$ für alle $t \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ gilt.

*In der Literatur gibt es verschiedene Notations- und Normierungskonventionen für die Hermite-Polynome, wir folgen hier M. Abramovitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, U.S. Government Printing Office, 1964 (siehe insbesondere Kap. 22 dort) bzw. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, F.W.J. Olver et al, Eds., Release 1.2.4 of 2025-03-15 (insbesondere Ch. 18 dort, `https://dlmf.nist.gov/18#PT3`). Mit der Setzung in (1) bilden die Hermite-Polynome ein Orthonormalsystem bezüglich der Standardnormalverteilung, es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{He}_m(x) \mathrm{He}_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = \delta_{mn} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}_0$$

Formel (1) entspricht in diesem Zusammenhang der zugehörigen Rodrigues-Formel mit Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x^2/2}$, erzeugender Funktion $F(x) = 1$ und Normierungsfaktor $\kappa_n = (-1)^n$ (in der Notation von Table 18.5.1 der *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, `https://dlmf.nist.gov/18.5#T1`).]

Aufgabe 5.2 (4+2+4+4 Punkte) Für stetige Semimartingale X und Y definiert man das *Fisk-Stratonovich-Integral* mittels

$$\int_0^t Y_s \, \partial X_s := \int_0^t Y_s \, dX_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

wobei $\int_0^t Y_s \, dX_s$ das Itō-Integral bezeichnet; in der Literatur ist auch die Notation $\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s \, \partial X_s$ üblich.

a) Zeigen Sie, dass für $f \in C^3(\mathbb{R})$ und ein stetiges Semimartingal X gilt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\partial X_s, \quad t \geqslant 0.$$

b) Wenn X ein darüberhinaus ein Martingal ist und Y (beispielsweise) beschränkt, so ist bekanntlich $\int Y\,dX$ ein Martingal. Gilt das auch für $\int Y\,\partial X$?

Im Folgenden sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots$ und $\lim_{m\to\infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}}(t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

c) Zeige Sie, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big(Y_{t_j^{(n)}\wedge t} - Y_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle Y, X\rangle_t \quad \text{lokal gleichmäßig } \mathbb{P}\text{-stochastisch}$$

gilt.

d) Wir setzen

$$S_t^{(n)} := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\big(Y_{t_j^{(n)}\wedge t} + Y_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big), \quad t \geqslant 0$$

Zeigen Sie:

$$S_t^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t Y_s\,\partial X_s \quad \text{lokal gleichmäßig } \mathbb{P}\text{-stochastisch}$$

[*Hinweise.* a) Drücken Sie $Y_t = f'(X_t)$ mittels Itō-Formel geeignet aus und setzen dies in die Formel (2) ein.

c) Betrachten Sie zunächst den Fall $Y = X$ und verwenden Sie dann $\langle Y, X\rangle = (\langle Y + X\rangle - \langle Y - X\rangle)/4$. Beachten Sie auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \big(X^2_{t_j^{(n)}\wedge t} - X^2_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big) - 2\sum_{j=1}^{\infty} X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)$$

und erinnern sich an Korollar 2.43 der Vorlesungsnotizen.

d) Beachten Sie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big(Y_{t_j^{(n)}\wedge t} + Y_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)\\
&\quad = Y_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big) + \frac{1}{2}\big(Y_{t_j^{(n)}\wedge t} - Y_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)\big(X_{t_j^{(n)}\wedge t} - X_{t_{j-1}^{(n)}\wedge t}\big)
\end{aligned}$$

verwenden Sie Teil c) und wiederum Korollar 2.43 der Vorlesungsnotizen.]

Aufgabe 5.3 (Ein pfadweiser Zugang zum Itō-Integral) Sei $\Delta^{(n)} = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots$ und $\lim_{m\to\infty} t_m^{(n)} = \infty$ eine Folge von Partitionen mit $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$ (d.h. $\Delta^{(n+1)}$ ist eine Verfeinerung von $\Delta^{(n)}$) und mit $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}}(t_m^{(n)} - t_{m-1}^{(n)}) = 0$ (d.h. immer feinere Maschenweite).

Für eine (deterministische) stetige Funktion φ, $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}$, und $t \geqslant 0$ sei

$$[\varphi]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} \big(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big)^2 \in [0, \infty]$$

die quadratische Variation (längs der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$) sofern der Grenzwert existiert (ansonsten bleibt $[\varphi]_t$ undefiniert). Sei weiter

$$\mathcal{C}_{\Delta,2} := \big\{\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \text{ stetig und } [\varphi]_t \text{ existiert und } [\varphi]_t < \infty \text{ für alle } t \geqslant 0\big\}$$

die Menge der stetigen Funktionen, die (bezüglich der Partitionsfolge $(\Delta^{(n)})$) endliche quadratische Variation besitzen.

Dann existiert für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t \geqslant 0$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}} f'\big(\varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big)\big(\varphi_{t\wedge t_m^{(n)}} - \varphi_{t\wedge t_{m-1}^{(n)}}\big) =: \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s$$

und es gilt die Itō-Formel

$$f(\varphi_t) = f(\varphi_0) + \int_0^t f'(\varphi_s)d\varphi_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s,$$

wobei $\int_0^t f''(\varphi_s)d[\varphi]_s$ als Integral bezüglich dem signierten Maß auf $\mathbb{R}_+$ mit Verteilungsfunktion $[\varphi]$. aufgefasst wird.

Bemerkung: Für die eindimensionale Brownsche Bewegung B und beispielsweise die Wahl $\Delta^{(n)} = \{m/2^n : m \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(B \in \mathcal{C}_{\Delta,2}) = 1$ (vgl. z.B. Übungsaufgabe 5.2 zur Stochastik II, WS24/25), d.h. dieser Zugang gestattet (zumindest) in diesem Fall eine „pfadweise“ Interpretation des stochastischen Integrals.

[*Hinweis.* Betrachten Sie eine Taylor-Entwicklung von f bis zur 2. Ordnung. Wenn Sie bei Ihren Überlegungen „steckenbleiben“ sollten, finden Sie Rat und Hilfe z.B. in Kapitel 25.3 von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer, 2020 oder in H. Föllmer, Calcul d'Itô sans probabilités, Lecture Notes in Math. 850, S. 143–150, Springer, 1981.]