Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen **SS 2025**

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (2+2+2 Punkte) a) Für $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ ist auch $X_t := M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t$ ein stetiges lokales Martingal. Wenn zusätzlich gilt $\mathbb{E}[M_0^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$ für jedes $t \geqslant 0$, so ist $M \in \mathcal{M}^c_2$.

b) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und eine f.s. endliche Stoppzeit τ (auf einem geeigneten filtrierten W'raum) finden, so dass $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\tau] = \infty$ gilt, aber auch aber $\mathbb{E}[M_\tau^2] < \infty$?

c) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und zwei f.s. endliche Stoppzeiten $\sigma \leqslant \tau$ finden mit $\mathbb{E}[|M_\tau|] < \infty$ aber $\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \neq M_\sigma$?

[*Hinweis.* Für b) und c) kann man die Brownsche Bewegung und geeignete Stoppzeiten verwenden.]

Aufgabe 6.2 (ein strikt lokales Martingal, das $\mathcal{L}^2$-beschränkt ist, 6 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t\geqslant 0}$ an (d.h. es gilt $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$), das kein Martingal ist.

[*Hinweis.* Betrachten Sie z.B. eine dreidimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geqslant 0}$ mit Startpunkt $B_0 \neq 0$ und untersuchen Sie $M_t = 1/||B_t||$ (wobei $||(x_1, x_2, x_3)|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm bezeichnet). Sie können die Verteilung von $||B_t||$ und damit auch von M_t leicht explizit bestimmen, wenn Sie annehmen, dass B_0 dreidimensional standard-normalverteilt ist, oder Sie können bei festem Startpunkt $B_0 = x \neq 0$ die auftretenden Integrale „grob von Hand“ abschätzen.]

Aufgabe 6.3 (Zur Feynman-Kac-Formel, 4 Punkte) Seien $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ stetig und beschränkt, $u : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x, t)$ sei zweimal stetig differenzierbar bezüglich der Raum-Koordinaten x, stetig differenzierbar bezüglich der Zeit-Koordinate t und eine Lösung des folgenden Anfangswert- oder Cauchy-Problems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - v(x)u(x,t), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$u(x,t) = \mathbb{E}_x \left[\exp\left(-\int_0^t v(B_s)\, ds \right) f(B_t) \right], \quad t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d$$

wobei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eine d-dimensionale Brownbewegung ist ($\mathbb{E}_x$ bezieht sich auf deren Erwartung bei Start in $B_0 = x$).

[*Hinweis.* Sei $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$. Betrachten Sie z.B. $V_s := \int_0^s v(B_u)\, du$, $M_s := e^{-V_s} u(t - s, B_s)$ für $0 \leqslant s \leqslant t$ und überprüfen Sie, dass $(M_s)_{0 \leqslant s \leqslant t}$ unter $\mathbb{P}_x$ ein Martingal ist.]

Aufgabe 6.4 (Harmonische Funktionen und Mittelwerteigenschaft, 2+6 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet, $h : U \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt.

a) Zeigen Sie: Falls h harmonisch in U ist, d.h. $h \in C^2(U)$ und $\Delta h(x) = 0$ für $x \in U$, so besitzt h die Mittelwerteigenschaft, d.h. es gilt

$$h(x) = \int_{\partial B_r(x)} h(y)\, \mu_{B_r(x)}(dy) \quad \text{für } x \in U,\ r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset U \tag{1}$$

wobei $\mu_{B_r(x)}$ das (als Wahrscheinlichkeitsmaß) normierte Oberflächenmaß auf der Kugeloberfläche $\partial B_r(x)$ bezeichnet.

b) Zeigen Sie: Falls h die Mittelwerteigenschaft besitzt, so ist h auch harmonisch.

[*Hinweise.* a) Verwenden Sie z.B. die Dynkin-Formel.

b) Um zunächst zu zeigen, dass h genügend glatt ist, können Sie beispielsweise aus (1) eine Darstellung von h als Faltungsintegral gewinnen: Sei $x \in B_{r_0}(x) \subset U$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ mit kompaktem Träger in $(0, r_0)$ und $\int_0^{r_0} \varphi(r)\, dr > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} c\, h(x) &= \int_{[0,r_0]} \varphi(r) r^{d-1} \int_{\partial B_r(x)} h(y)\, \mu_{B_r(x)}(dy)\, dr \\ &= \int_{B_{r_0}(0)} \varphi(|y|) h(x+y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|z-x|) h(z)\, dz \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c \in (0, \infty)$.

Verwenden Sie dann die Dynkin-Formel auf einer Folge von Kugeln mit Mittelpunkt x und immer kleinerem Radius.]