Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik III: Übungen und Ergänzungen **SS 2025**

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, 4+2 Bonuspunkte) Sei $(X_t)_{t\geqslant 0}$ die eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t$$

mit $b \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0,\infty)$ und (B_t) einer eindimensionalen Brownbewegung.

a) Zeigen Sie

$$X_t = e^{-bt}\Big(X_0 + \sigma \int_0^t e^{bs}\, dB_s\Big)$$

und folgern Sie: Bei Start in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}(X_t) = \mathcal{N}\big(x_0 e^{-bt}, \sigma^2(1-e^{-2bt})/(2b)\big)$. Unter welchen Bedingungen konvergiert X_t in Verteilung für $t \to \infty$, und gegen was?

b) Sei $\mathcal{L}(X_0) = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ für ein $\sigma_0 \geqslant 0$ (mit der Interpretation $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$). Bestimmen Sie die Kovarianzstruktur $c(s,t) := \mathbb{E}\big[X_s X_t\big]$. Unter welchen Bedingungen ist (X_t) dann stationär?

Aufgabe 8.2 ([squared-]Bessel-Prozesse, 4+4+4 Bonuspunkte) Sei $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(d)})$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt $W_0 = w_0$, $Z_t := ||W_t||^2$.

a) Z ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = 2\sqrt{Z_t}\, dB_t + b\, dt, \quad Z_0 = z_0 = ||w_0||^2 \tag{1}$$

wo $b = d$ und (B_t) eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung.

Folgern Sie: Für $b = 1$ gilt $\sup\{t : Z_t = 0\} = \infty$ f.s., für $b = 2$ gilt $\liminf_{t\to\infty} Z_t = 0$ f.s., für $b \in \{3, 4, \dots\}$ gilt $Z_t > 0$ für alle $t > 0$ f.s.

b) Seien Z' und Z'' Lösungen von (1) mit $Z'_0 = z'_0$, $Z''_0 = z''_0$ und $b = b' \in \mathbb{R}_+$ bzw. $b = b'' \in \mathbb{R}_+$, aber unabhängigen treibenden Brownschen Bewegungen B' bzw. B''. Dann ist $Z_t := Z'_t + Z''_t$ eine (schwache) Lösung von (1) mit Startpunkt $Z_0 = z'_0 + z''_0$ und $b = b' + b''$.

c) Welche stochastische Differentialgleichung löst der Prozess $Y_t = \sqrt{Z_t}$?

[*Hinweis.* a) Verwenden Sie die Itō-Formel und benutzen Sie Lévys Charakterisierung um zu prüfen, dass der Prozess $\sum_{i=1}^d \int_0^t W_s^{(i)}/||W_s||\, dW_s^{(i)}$ eine Brownsche Bewegung ist.

b) Betrachten Sie $\beta_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s>0\}} \sqrt{Z'_s/Z_s}\, dB'_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s>0\}} \sqrt{Z''_s/Z_s}\, dB''_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s=0\}}\, d\tilde{B}_s$, wo $\tilde{B}$ eine weitere, unabhängige Brownsche Bewegung ist.]

Aufgabe 8.3 (4 Bonuspunkte) Sei $d \geqslant 2$, $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 \neq 0$, $\rho_t := ||B_t|| := \big((B_t^{(1)})^2 + \cdots + (B_t^{(d)})^2\big)^{1/2}$, $t \geqslant 0$.

Zeigen Sie:

$$W_t = \rho_t - \rho_0 - \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\, ds, \quad t \geqslant 0$$

ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung.

Aufgabe 8.4 (Beweisdetails für Bericht 3.16 der Vorlesungsnotizen, 4+4 Bonuspunkte) a) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex existiert die linksseitige Ableitung

$$D_- f(x) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, und $x \mapsto D_- f(x)$ ist nicht-fallend (denn für $x < y < z$ gilt $f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$ wegen der Konvexität von f), demnach definiert $\mu^f([a,b)) := D_- f(b) - D_- f(a)$, $a < b$, ein lokal-endliches positives Maß (man kann μ^f als die 2. Ableitung von f im Distributionssinn auffassen, für $f \in C^2(\mathbb{R})$ ist $\mu^f(dx) = f''(x)dx$).

Sei $(X_t)_{t \geqslant 0}$ ein lokales Martingal mit Lokalzeitenprozess $\{\ell_t^a, t \geqslant 0, a \in \mathbb{R}\}$. $(f(X_t))_{t \geqslant 0}$ ist ein Semimartingal und es gilt die Meyer-Itō-Formel:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t D_- f(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \ell_t^a \, \mu^f(da). \tag{2}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst ein stückweise lineares, konvexes f mit endlich vielen „Knickstellen", dann ist $\mu^f = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j}$ und $f(x) = d_0 + d_1 x + \sum_{j=1}^n c_j |x - x_j|$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $c_1, \dots, c_n > 0$, $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$; in diesem Fall erhält man (2) leicht aus der Tanaka-Formel. Im allgemeinen Fall approximieren Sie μ^f geeignet mit μ^{f_n} dieses Typs.]

b) Folgern Sie aus a) die Okkupationszeitformel: Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar gilt

$$\int_0^t \varphi(X_s)\, d\langle X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) \ell_t^a \, da, \quad t \geqslant 0 \quad \text{f.s.} \tag{3}$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f'' = \varphi$, dann gilt $D_- f = f'$ und $\int_{\mathbb{R}} g(a)\, \mu^f(da) = \int g(a)\varphi(a)\, da$ für jedes messbare $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Setzen Sie $g(a) = \ell_t^a$ ein und vergleichen Sie den Ausdruck aus (2) mit dem Ausdruck der Itō-Formel für $f(X_t)$, um (3) in diesem Fall zu erhalten. Für den allgemeinen Fall beachten Sie beispielsweise, dass die Klasse der φ, für die (3) gilt, einen unter monotoner Konvergenz abgeschlossenen Vektorraum bildet.]

Aufgabe 8.5 Sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gewöhnliche symmetrische Irrfahrt mit $S_0 = 0$ und $\tau_{-1} := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = -1\}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$Z_k := \#\{0 \leqslant n < \tau_{-1} : S_n = k, S_{n+1} = k-1\}$$

die Anzahl „Abstiege" von k nach $k-1$, die der S-Pfad vor der Zeit τ_{-1} ausführt (offenbar $Z_0 = 1$). Zeigen Sie: $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Galton-Watson-Prozess mit Nachkommensverteilung Geom(1/2), d.h. Z ist eine (diskrete) Markovkette und es gilt

$$\mathcal{L}(Z_{k+1} | Z_k = j) = \mathcal{L}\big(\textstyle\sum_{i=1}^j \xi_i\big), \quad k, j \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

mit $\xi_1, \xi_2, \dots$ u.i.v., $\mathbb{P}(\xi_1 = m) = 2^{-(m+1)}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ (übrigens: die Verteilung rechts ist eine negative Binomialverteilung $b^-_{j,1/2}$). b.w.

[*Hinweis.* Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ Stoppzeitenfolgen $\tilde{\sigma}_0^{(k)} := 0$, $\sigma_i^{(k)} := \inf\{n > \tilde{\sigma}_{i-1}^{(k)} : S_n = k\}$, $\tilde{\sigma}_i^{(k)} := \inf\{n > \sigma_i^{(k)} : S_n = k-1\}$, $i = 1, 2, \dots$, mit $\tilde{\sigma}_i^{(k)} := \sigma_i^{(k)} := \infty$ für $i > Z_k$ (es kann hilfreich sein, eine Skizze anzufertigen). Sei $\tilde{S}^{(k,i)} = \big(S_{\sigma_i^{(k)}+n} : 0 \leqslant n < \tilde{\sigma}_i^{(k)} - \sigma_i^{(k)}\big)$. Die starke Markov-Eigenschaft zeigt, dass der Pfad von S in Z_k unabhängige Exkursionen $\tilde{S}^{(k,i)}$, $i = 1, \dots, Z_k$ oberhalb von k zerfällt.]

[*Bericht.* Die Aussage (4) ist sozusagen eine diskrete „infinitesimale" Version des Satzes von Ray und Knight: Sei B eindimensionale Standard-Brownbewegung, ℓ_t^a ihr Lokalzeitenprozess, $\tau_x := \inf\{t \geqslant 0 : \ell_t^0 > x\}$, und $Z_a := \ell_{\tau_x}^a$ für $a \geqslant 0$, dann ist $(Z_a)_{a \geqslant 0}$ ein Version von Fellers Verzweigungsdiffusion. Z löst $Z_a = x + \int_0^a 2\sqrt{Z_u}\, d\beta_u$ für eine Brownbewegung (β_u).]