

Stochastik III

Notizen zu einer Vorlesung an der
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Sommer 2025

Matthias Birkner

Vorläufige Version, 28. April 2025

Kommentare, Korrekturvorschläge, Hinweise auf (Tipp-)fehler gerne per Email an
`birkner@mathematik.uni-mainz.de` senden

Inhaltsverzeichnis

1	Brownsche Bewegung	2
1.1	Grundlegendes	2
1.2	Starke Markov-Eigenschaft und Folgerungen	8
1.3	Donskers Invarianzprinzip	14
2	Stochastische Integration	18
2.1	Zur Motivation	18
2.2	(Einige Eigenschaften) zeitstetige(r) Martingale	19
2.3	Stochastisches Integral	27

Ich danke Clara Bröer, Matthias Liesenfeld, Matthias Muth, Stella Preußler, Ilka Reinhard, Timo Schlüter, Jan Weldert und Carina Zeller, die durch ihre kritische Lektüre voriger Versionen dieser Notizen an verschiedenen Stellen zur Korrektur von Ungenauigkeiten und Tippfehlern und zur Präzisierung von Formulierungen beigetragen haben.

Kapitel I

Brownsche Bewegung

I.1 Grundlegendes

Definition 1.1. Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ heißt (d -dimensionale) Brownsche Bewegung, falls gilt

$$\begin{aligned} &\text{für } n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \text{ sind } B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \text{ unabhängig} \\ &\text{mit } B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (t_i - t_{i-1})I_d) \end{aligned} \quad (1.1)$$

und $t \mapsto B_t$ ist stetig.

Erinnerung 1.2. [Kl, Bsp. 14.48] (und analog [St2, Bsp. 6.19] und [St2, Ber. 6.20]) konstruiert auf $\Omega = \mathbb{R}^{[0, \infty)} = \{\omega \mid \omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}$, ausgestattet mit der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}^{\otimes [0, \infty)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass der durch die kanonischen Projektionen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X_t(\omega) = \omega(t)$ definierte stochastische Prozess $X = (X_t)_{t \in [0, \infty)}$ die Bedingung (1.1) erfüllt. (Es wurde dazu geprüft, dass die Brownsche Halbgruppe von Übergangskernen $\kappa_t(x, dy) = \mathcal{N}(x, t)(dy)$ eine konsistente Familie von endlich-dimensionalen Verteilungen erzeugt und dann Kolmogorovs Erweiterungssatz, [Kl, Satz 14.39] oder [St2, Satz 6.12] verwendet.) Die Frage, ob ein solcher Prozess stetige Pfade hat bzw. haben kann, blieb dort (zunächst) unbehandelt.

In [St2, Kap. 2] hatten wir die Existenz stetiger Pfade via Lévy-Konstruktion bewiesen (vgl. [St2, Satz 2.2]); wir betrachten hier nun einen etwas allgemeineren Ansatz.

Definition 1.3. Seien $X = (X_t)_{t \geq 0}, Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ stochastische Prozesse mit demselben Wertebereich, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind.

1. Y heißt *Modifikation* oder *Version* von X (und umgekehrt), falls

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{gilt.}$$

2. X und Y heißen *ununterscheidbar*, falls es ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ gibt, so dass für jedes $t \geq 0$ gilt $\{X_t \neq Y_t\} \subset N$.

Bemerkung 1.4. Offenbar gilt

X und Y ununterscheidbar $\Rightarrow X$ und Y sind einander Modifikationen,

die Umkehrung gilt i.A. nicht (ändere z.B. einen stetigen Pfad zu einer $\text{unif}([0, 1])$ -verteilten Zeit willkürlich ab).

Die Umkehrung gilt, wenn wir (z.B.) a priori wissen, dass X und Y (f.s.) rechtsstetige Pfade besitzen, denn dann gilt

$$X_t = \lim_{s \searrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s = \lim_{s \searrow t, s \in \mathbb{Q}} Y_s = Y_t \quad \text{auf} \quad \bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+} \{X_s = Y_s\}.$$

und $\mathbb{P}(\bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+} \{X_s = Y_s\}) = 1$.

Erinnerung. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt *Hölder-stetig* von der Ordnung $\gamma (> 0)$, falls es ein $C < \infty$ gibt mit

$$\forall s, t : \|f(s) - f(t)\| \leq C|s - t|^\gamma.$$

f heißt *lokal Hölder-stetig*, falls für jedes $T > 0$ die Funktion $f(\cdot \wedge T)$ Hölder-stetig ist.

Satz 1.5 (Kolmogorov-Chentsov¹). $X = (X_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess, es gebe $\alpha, \beta > 0$ und für jedes $T > 0$ ein $C_T < \infty$ mit

$$\mathbb{E}[\|X_t - X_s\|^\alpha] \leq C_T |t - s|^{1+\beta} \quad \text{für } s, t \in [0, T].$$

1. Dann gibt es eine Modifikation $\tilde{X}$ von X , die lokal Hölder-stetige Pfade besitzt von jeder Ordnung $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$
2. Für $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, $T > 0$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K = K(\varepsilon, T, \alpha, \beta, \gamma, C_T) < \infty$ mit

$$\mathbb{P}(\|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\| \leq K|t - s|^\gamma \text{ für alle } s, t \in [0, T]) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass X für jedes $T > 0$ eine auf $[0, T]$ (Hölder-)stetige Modifikation $X^{(T)}$ besitzt, denn dann sind $X^{(T)}$ und $X^{(T')}$ für $T > T'$ ununterscheidbar (vgl. Bem 1.4),

$$N := \bigcup_{T, T' \in \mathbb{N}, T < T'} \{\exists t \leq T : X_t^{(T)} \neq X_t^{(T')}\}$$

ist Nullmenge und $\tilde{X}_t := X_t^{(T)}$ für $T \in \mathbb{N}$ mit $T > t$ ist auf N^c wohldefiniert (setze z.B. $\tilde{X}_t = 0$ auf N).

Sei im Folgenden $d = 1$ und $T = 1$ (zur Vereinfachung der Notation).

Mit Markov-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-\alpha} C_1 |t - s|^{1+\beta}, \quad (1.2)$$

¹Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987; Nikolai Nikolaevich Chentsov, 1930–1993

insbes. $X_t \rightarrow X_s$ für $t \rightarrow s$ stochastisch (für jedes $s \in [0, \infty)$).

Die zentrale Idee ist, $\tilde{X}_t$ zunächst auf dyadisch rationalen Zahlen t zu konstruieren und dann stetig fortzusetzen. Sei dazu

$$D_n := \{k/2^n : k = 0, 1, \dots, 2^n\}, \quad D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n, \quad \gamma \in (0, \beta/\alpha),$$

zeige

$$C := \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq 1 \\ s, t \in D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} < \infty \quad \text{f.s.} \quad (1.3)$$

Sei

$$\xi_n := \max_{k=1, \dots, 2^n} |X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}|,$$

$$\mathbb{P}(\xi_n \geq 2^{-\gamma n}) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}(|X_{k/2^n} - X_{(k-1)/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}) \stackrel{(1.2)}{\leq} 2^n (2^{-\gamma n})^{-\alpha} C_1 (2^{-n})^{1+\beta} = C_1 2^{(\alpha\gamma - \beta)n},$$

also

$$\sum_n \mathbb{P}(\xi_n \geq 2^{-\gamma n}) < \infty$$

(denn $\alpha\gamma - \beta < 0$) und

$$C_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\xi_n}{2^{-\gamma n}} < \infty \quad \text{f.s.}$$

(mit Borel-Cantelli ist $\xi_n \leq 2^{-\gamma n}$ für $n \geq N_0 = N_0(\omega)$).

Seien $s, t \in D$, $s < t$ mit $2^{-m-1} < |t - s| \leq 2^{-m}$ (für ein geeign. m):

$\exists \ell \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_{\ell-1} \in D$ mit

$$s =: t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell := t, \quad t_i - t_{i-1} = 2^{-n_i} \text{ mit } n_i > m$$

$$\text{und } \forall n > m : \#\{1 \leq i \leq \ell : n_i = n\} \leq 2$$

(beispielsweise via dydische Entwicklung von s, t zu beweisen²) d.h.

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq \sum_{i=1}^{\ell} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \leq 2 \sum_{n > m} \xi_n \\ &\leq 2C_0 \sum_{n > m} 2^{-\gamma n} = \frac{2C_0}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-\gamma(m+1)} \leq \frac{2C_0}{1 - 2^{-\gamma}} |t - s|^\gamma \end{aligned}$$

²Sei o.E. $s < t$. Wir können $s = \sum_{i=1}^k a_i 2^{-i}$, $t = \sum_{i=1}^k b_i 2^{-i}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ schreiben, wobei $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ lexikographisch größer ist als $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, d.h. es gibt ein $k' < k$ mit $a_1 = b_1, \dots, a_{k'-1} = b_{k'-1}$, $a_{k'} = 0 < b_{k'} = 1$. Sei $t' := \sum_{i=1}^{k'} b_i 2^{-i}$ (somit $s < t' \leq t$). Wegen $0 < t' - s \leq 2^{-m}$ können wir schreiben $t' = s + 2^{-n'_1} + 2^{-n'_2} + \dots + 2^{-n'_{\ell'}}$ für gewisse $n'_1 > n'_2 > \dots > n'_{\ell'} > m$ (wir eliminieren, von der am weitesten rechts stehenden 1 beginnend, die 1er rechts der k' -ten Stelle in der Binärentwicklung von s); weiterhin können wir $t = t' + 2^{-n''_{\ell''}} + 2^{-n''_{\ell''-1}} + \dots + 2^{-n''_1}$ schreiben für gewisse $m < n''_{\ell''} < \dots < n''_1$ (wir fügen zur Binärdarstellung von t' nacheinander diejenigen 1er hinzu, die daraus die Binärdarstellung von t machen). Die sich daraus ergebende Darstellung von $t - s = (t' - s) + (t - t')$ leistet das Gewünschte.

und (1.3) gilt und insbesondere ist

$$D \ni t \mapsto X_t \quad (\text{f.s.}) \text{ gleichmäßig stetig.}$$

Setze

$$\tilde{X}_t := \lim_{u \rightarrow t, u \in D} X_u, \quad t \in [0, 1]$$

(der Grenzwert existiert, denn sei $(u_n) \subset D$ mit $u_n \rightarrow t$, so ist (X_{u_n}) Cauchy-Folge), es gilt

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} \leq C$$

(verwende (1.3) und die Approximationsdef.), für $t \in [0, 1]$, $s \in D$, $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathbb{P}(|X_t - \tilde{X}_t| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|X_s - \tilde{X}_t| \geq \varepsilon/2) \xrightarrow{s \rightarrow t, s \in D} 0,$$

also $\mathbb{P}(X_t \neq \tilde{X}_t) = 0$, d.h. i. gilt.

2. folgt aus obigem Beweis, da $C = C(\omega)$ aus (1.3) f.s. endlich ist. □

Bemerkung 1.6. Wir sehen aus dem Beweis, dass Satz 1.5 analog für jeden vollständigen metrischen Raum als Wertebereich gilt.

Korollar 1.7. Die Brownsche Bewegung $B = (B_t)$ (im Sinne von Def. 1.1) existiert, mit der Zusatzannahme $B_0 = \mathbf{0}$ ist die Verteilung eindeutig bestimmt („Standard-Brownsche Bewegung“). B hat f.s. lokal Hölder-stetige Pfade der Ordnung γ für jedes $\gamma < 1/2$.

Die Verteilung der Brownschen Bewegung ist ein W -Maß auf $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, sie heißt auch das (d -dimensionale) Wiener³-Maß.

Beweis. Betrachte zunächst $d = 1$. In [St2, Bsp. 6.19] (oder in [Kl, Bsp. 14.48]), vgl. Erinnerung 1.2 wurde ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ (auf $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$) konstruiert, der (1.1) erfüllt.

Es ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2n}] = \mathbb{E}[(\sqrt{|t - s|}Z)^{2n}] = |t - s|^n \mathbb{E}[Z^{2n}]$$

mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $\mathbb{E}[Z^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 < \infty$, Satz 1.5 mit $\alpha = 2n$, $\beta = n - 1$ liefert Modifikation $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, die Hölder-stetig zu jeder Ordnung $\gamma < \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ ist.

Sind $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ u.a. Kopien der 1-dim. BB, so ist

$$B_t := (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}), \quad t \geq 0$$

eine d -dim BB. □

³Norbert Wiener, 1894–1964; N. Wiener, Differential space, *Jour. Math. and Phys. Mass. Inst. Technology* 2, 131–174 (1923)

Beobachtung 1.8. 1. (B_t) ist Standard-Brownsche Bewegung g.d.w. B zentrierter Gaußscher Prozess (d.h. $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ ist multivariat normalverteilt für jede Wahl von $t_1 < \dots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$) mit stetigen Pfaden und

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = s \wedge t, \quad s, t \geq 0$$

(d-dim. Fall: die Kovarianzmatrix ist $\text{Cov}[B_{i,s}, B_{j,t}] = \delta_{ij}(s \wedge t)$).

2. (Skalierungsinvarianz) Für $c \neq 0$ ist auch $\tilde{B}_t := \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ Brownsche Bewegung.

3. (Zeitumkehr) B Standard-Brownsche Bewegung, so ist

$$X_t := \begin{cases} t B_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

ebenfalls Standard-Brownsche Bewegung.

Beweis. 1. Sei zunächst $(B_t)_{t \geq 0}$ eine (Standard-) Brownsche Bewegung. Für $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\text{Cov}[B_s, B_t] = \text{Cov}[B_s, B_s + (B_t - B_s)] = \text{Var}[B_s] + \text{Cov}[B_s, B_t - B_s] = s + 0 = s = s \wedge t.$$

Die Umkehrung folgt aus der Tatsache, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen eines (zentrierten) Gaußschen Prozesses durch die Kovarianzen festgelegt sind, vgl. z.B. [Kl, Kap. 15.6] oder [St2, Kap. 4.1].

2. Es gilt $\tilde{B}_0 = 0$, $\tilde{B}$ hat stetige Pfade und für die Kovarianzen gilt

$$\text{Cov}[\tilde{B}_s, \tilde{B}_t] = \frac{1}{c^2} \text{Cov}[B_{c^2 s}, B_{c^2 t}] = \frac{1}{c^2} (c^2 s \wedge c^2 t) = s \wedge t.$$

3. $(X_t)_t$ ist Gaußscher Prozess,

$$\text{Cov}[X_s, X_t] = st \text{Cov}[B_{1/s}, B_{1/t}] = st \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t} \right) = t \wedge s \quad \text{für } s, t > 0, \quad (1.4)$$

$$\text{Cov}[X_0, X_t] = 0 = 0 \wedge t. \quad (1.5)$$

Offenbar ist $t \mapsto X_t$ stetig für $t > 0$. Zur Stetigkeit in $t = 0$:

$$(X_t : t \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}) \stackrel{d}{=} (B_t : t \in (0, 1] \cap \mathbb{Q})$$

und X und B haben beide stetige Pfade in $(0, 1]$

$$\begin{aligned} \implies & (X_t)_{t \in (0, 1]} \stackrel{d}{=} (B_t)_{t \in (0, 1]} \\ \implies & \mathbb{P}(X \text{ gleichmäßig stetig auf } (0, 1]) = 1 \\ \implies & \lim_{t \searrow 0} X_t \text{ existiert f.s.} \end{aligned}$$

□

Sei

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(B_s, s \leq t), \quad (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0} \text{ die von } B \text{ erzeugte Filtration,} \quad (I.6)$$

$$\mathcal{F}_0^+ := \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t^0. \quad (I.7)$$

Satz 1.9 (Blumenthals 0-1-Gesetz). $\mathcal{F}_0^+$ ist trivial, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für $A \in \mathcal{F}_0^+$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$Y^n := (B_{2^{-n}+t} - B_{2^{-n}})_{0 \leq t \leq 2^{-n}}$$

(mit Werten in $C([0, 2^{-n}], \mathbb{R})$),

$Y^1, Y^2, \dots$ sind unabhängig

(und sogar bis auf deterministische Umskalierung identisch verteilt), also ist

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\sigma(Y^m, m \geq n)}_{= \mathcal{F}_{2^{-n}-1}^0} \quad \text{trivial}$$

(gem. Kolmogorovs 0-1-Gesetz, vgl. z.B. [Kl, Satz 2.37]), demnach ist auch

$$\mathcal{F}_0^+ = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{2^{-n}}^0 \quad \text{trivial.}$$

□

Beispiel 1.10 (ein Bsp. für Anwendung von Satz 1.9). Es gilt

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{f.s.}$$

Insbesondere ist B f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung $1/2$ in $t = 0$ (und ebenso für jedes andere, feste $t > 0$), insbesondere ist der Pfad nicht differenzierbar.

Mit Zeitumkehr (Beob. 1.8, 3.) folgt auch

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \searrow 0} \frac{tB_{1/t}}{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} \limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty$$

und analog

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty,$$

zusammen mit Stetigkeit der Pfade also

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R} : \quad \sup\{t : B_t = x\} = \infty \quad \text{f.s.}$$

(Rekurrenz der 1-dim BB).

Beweis. Für $s > 0$, $K \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{s,K} := \left\{ \inf\{t > 0 : B_t \geq K\sqrt{t}\} < s \right\}$$

(offenbar $A_{s,K} \subset A_{s',K}$ für $s \leq s'$),

$$A_K := \bigcap_{s>0} A_{s,K} = \left\{ \inf\{t > 0 : B_t \geq K\sqrt{t}\} = 0 \right\} \in \mathcal{F}_0^+,$$

also $\mathbb{P}(A_K) \in \{0, 1\}$ gemäß Satz 1.9, wegen

$$\mathbb{P}(A_K) = \lim_{s \downarrow 0} \mathbb{P}(A_{s,K}) \geq \liminf_{s \downarrow 0} \mathbb{P}(B_{s/2} \geq K\sqrt{s/2}) = \mathbb{P}(B_1 \geq K) > 0$$

gilt

$$1 = \mathbb{P}(A_K) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{K \in \mathbb{N}} A_K\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right).$$

Für die analoge Aussage über den $\liminf$ betrachte $(-B_t)_{t \geq 0}$. □

Bericht 1.11. Detaillierte Auskunft über das Verhalten der Pfade der (eindimensionalen) Brownschen Bewegung geben

das Gesetz vom iterierten Logarithmus

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{f.s.}, \quad \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad \text{f.s.}$$

(beachte: angesichts Beob. 1.8, 3. implizieren sich die beiden Formeln gegenseitig)

und Lévy's Stetigkeitsmodul der Brownschen Bewegung:

$$\limsup_{h \searrow 0} \sup_{t \in [0,1]} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{2h \log \frac{1}{h}}} = 1 \quad \text{f.s.} \tag{1.8}$$

1.2 Starke Markov-Eigenschaft und Folgerungen

Definition 1.12. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ heißt *rechtsstetig*, wenn $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Sei ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gegeben. Wir betrachten die rechtsstetige Vervollständigung der kanonischen Filtration (mit $\mathcal{F}_u^0 = \sigma(X_s : s \leq u)$):

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u^0 \tag{1.9}$$

(diese *ist* rechtsstetig).

Bemerkung 1.13. Wenn $(\mathcal{F}_t^0)$ die kanonische Filtration einer Brownschen Bewegung (B_t) ist, so entsteht die rechtsstetige Vervollständigung (1.9) durch Hinzunehmen gewisser Nullmengen, es gilt für $t \geq 0$

$$\text{zu } A \in \mathcal{F}_t \text{ gibt es ein } A' \in \mathcal{F}_t^0 \text{ mit } \mathbb{P}(A \Delta A') = 0.$$

(Für $t = 0$ folgt dies aus Blumenthals 0-1-Gesetz, Satz 1.9.)

Beweis. Wir betrachten o.E. die BB mit Startpunkt $B_0 = 0$, wir schreiben $\mathbb{P}_x$ (und entspr. $\mathbb{E}_x$) für die Situation mit Startpunkt $B_0 = x$.

Sei $A \in \sigma(B_s : s \geq 0)$, $t \geq 0$, wir zeigen: Es gibt eine beschränkte, $\mathcal{F}_t^0$ -messbare ZV Y mit

$$\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] = Y \quad \mathbb{P}_0\text{-f.s.} \quad (1.10)$$

Für $A \in \mathcal{F}_t$ leistet dann $A' := \{Y = 1\} \in \mathcal{F}_t^0$ das Gewünschte, denn dann ist

$$\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] = Y \quad \mathbb{P}_0\text{-f.s.}$$

Es genügt, in (1.10) Ereignisse A der Form

$$A = \{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k, B_{t+s_1} \in D_{k+1}, \dots, B_{t+s_\ell} \in D_{k+\ell}\} \quad (1.11)$$

mit $k, \ell \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$, $0 < s_1 < \dots < s_\ell$, $D_1, \dots, D_{k+\ell} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zu betrachten (diese bilden eine $\cap$ -stabile Erzeugermenge von $\sigma(B_s : s \geq 0)$ und die Menge der Ereignisse, für die es ein Y wie in (1.10) gibt, sind ein Dynkin-System).

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+1/n}^0] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{P}_{B_{t+1/n}}(B_{s_1-1/n} \in D_{k+1}, \dots, B_{s_\ell-1/n} \in D_{k+\ell}) \\ &= \mathbf{1}_{\{B_{t_0} \in D_0, \dots, B_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{P}_{B_t}(B_{s_1} \in D_{k+1}, \dots, B_{s_\ell} \in D_{k+\ell}), \end{aligned}$$

wobei wir für das erste Gleichheitszeichen den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (z.B. [Stz, Satz 1.13]) oder [Kl, Satz 12.14]), für das zweite Gleichheitszeichen die schwache Markov-Eigenschaft und für das dritte die Stetigkeit der Pfade ausnutzen. Die rechte Seite ist offenbar $\mathcal{F}_t^0$ -messbar, d.h. (1.10) gilt. $\square$

Erinnerung. Eine ZV τ mit Werten in $[0, \infty]$ heißt *Stoppzeit* (bezgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), wenn gilt

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für jedes } t \geq 0.$$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \sigma(\mathcal{F}_u, u \geq 0) : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für jedes } t \geq 0\}$$

ist die $(\sigma$ -Algebra der) τ -Vergangenheit.

Bemerkung 1.14. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtsstetig, dann ist τ eine Stoppzeit g.d.w. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ (denn $\{\tau \leq t\} = \bigcap_n \{\tau < t + 1/n\}$).

Weiterhin gilt für jede Folge τ_n von Stoppzeiten mit $\tau_n \searrow_{n \rightarrow \infty} \tau$: $\mathcal{F}_\tau = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$

Bem.: im Allgemeinen ist $\inf\{t > 0 : X_t \notin [a, b]\}$ keine $(\mathcal{F}_t^0)$ -Stoppzeit.

Bemerkung 1.15. Die Brownsche Bewegung ist ein Martingal (bezüglich der kanonischen Filtration und [anhand von Bem. 1.13] auch bezüglich deren rechtsstetiger Vervollständigung).

Satz 1.16 (Optional sampling, zeitkontinuierlicher Fall). $(X_t)_{t \geq 0}$ Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtsstetige Filtration, σ, τ Stoppzeiten. Wenn τ beschränkt ist oder wenn $(X_t)_{t \geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist, so gilt

$$X_\tau \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau} \text{ f.s.}$$

Beweis.

$$\sigma_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \sigma + 1 \rfloor, \quad \tau_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor$$

sind Stoppzeiten, die nur abzählbar viele Werte annehmen, und $\sigma_n \searrow \sigma, \tau_n \searrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$.

Sei τ beschränkt, $\tau \leq T$ für ein festes $T < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\sigma_m}] \geq X_{\sigma_m \wedge \tau_n} \text{ f.s.} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

(optional sampling in diskreter Zeit, z.B. [St2, Satz B.27] oder [Kl, Satz 10.11 und Satz 10.21]), es gilt $\bigcap_m \mathcal{F}_{\sigma_m} = \mathcal{F}_\sigma$ (Rechtsstetigkeit der Filtration), also mit $m \rightarrow \infty$ (und der Rechtsstetigkeit der Pfade von X)

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau_n} \text{ f.s.} \quad (1.12)$$

Rechtsstetigkeit der Pfade liefert $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$ f.s., noch zu zeigen ist $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$ in $\mathcal{L}^1$.

Es ist

$$B_k := \mathbb{E}[X_{\tau_k} - X_{\tau_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}}] \geq 0 \quad (\text{f.s.})$$

und

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right] = \mathbb{E}[X_{\tau_0}] - \inf_{k \geq 1} \mathbb{E}[X_{\tau_k}] < \infty,$$

demnach existiert $A_n := \sum_{k=n}^{\infty} B_k$ (f.s.) und $M_n := X_{\tau_n} - A_n$ erfüllt $\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}] = M_{n+1}$, d.h. $(M_{-m})_{m \in -\mathbb{N}_0}$ ist ein Rückwärtsmartingal (beachte $\mathcal{F}_{\tau_n} \supset \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$). Gemäß Rückwärtsmartingalkonvergenzsatz (z.B. [St2, Satz 1.13] oder [Kl, Satz 12.14]) existiert $\lim_{m \rightarrow -\infty} M_{-m}$ in $\mathcal{L}^1$, insbes. ist $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar. Wegen $0 \leq A_n \leq A_0$ mit $\mathbb{E}[A_0] < \infty$ ist auch $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar,

$$\implies \{X_{\tau_n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist gleichgradig integrierbar}$$

somit gilt auch $\mathcal{L}^1$ -Konvergenz und mit $n \rightarrow \infty$ in (1.12) folgt $\mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq X_{\sigma \wedge \tau}$ f.s.

Sei nun τ möglicherweise unbeschränkt und $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ gleichgradig integrierbar

$$\implies \exists X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{mit} \quad X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_\infty \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

denn dies gilt längs jeder Folge $t_k \nearrow \infty$ gemäß (Sub-)Martingalkonvergenzsatz (z.B. [St2, Satz B.21] oder [Kl, Satz 11.14]), daher kann der Grenzwert nicht von der Folge abhängen.

Da $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^+ = x \vee 0$ konvex ist, ist auch $(X_t^+)_{t \geq 0}$ ein Submartingal; offensichtlich ist es ebenfalls gleichgradig integrierbar und

$$X_t^+ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_\infty^+ \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

Zudem gilt (mit dem Optional sampling-Theorem in diskreter Zeit) für jede Stoppzeit ρ mit diskretem Wertebereich

$$X_\rho^+ \leq \mathbb{E}[X_\infty^+ | \mathcal{F}_\rho] \text{ f.s.}$$

Weiter gibt es (wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit) ein streng monoton wachsendes, konvexes $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)/x = \infty$ und $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\varphi(X_t^+)] < \infty$ (vgl. [St2, Erinnerung B.23] oder [Kl, Satz 6.19]), mit Lemma von Fatou

$$\mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+)] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(X_t^+)] < \infty$$

und somit für jedes n (wir verwenden die Jensensche Ungleichung für die zweite Ungleichung)

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{\tau_n \wedge n}^+)] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(\mathbb{E}[X_\infty^+ | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge n}])\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+) | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge n}]\right] = \mathbb{E}[\varphi(X_\infty^+)] (< \infty).$$

Demnach ist $\{X_{\tau_n \wedge n}^+ : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar wir finden

$$\begin{aligned} X_{\tau \wedge \sigma} &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n \wedge \sigma \wedge n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma]) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n \wedge n}^- | \mathcal{F}_\sigma] \\ &\leq \mathbb{E}[X_\tau^+ | \mathcal{F}_\sigma] - \mathbb{E}[X_\tau^- | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung wie in (1.12) argumentieren und für die dritte das Lemma von Fatou verwenden. $\square$

Beispiel 1.17. Sei B Standard-Brownsche Bewegung, $\tau_x := \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$ (mit Bsp. 1.10) ist $\tau_x < \infty$ für alle x .

Für $a, b > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{b}{a+b}.$$

Beweis. (Wir verwenden dasselbe „klassische“ Martingal-Argument wie im Fall der gewöhnlichen Irrfahrt.) Sei $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$, startend von $B_0 = 0 \in (-a, b)$ ist $(B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$ beschränktes, insbesondere gleichgradig integrierbares Martingal, also

$$\mathbb{E}[B_\tau] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[B_{t \wedge \tau}] = \mathbb{E}[B_0] = 0,$$

andererseits ist

$$\mathbb{E}[B_\tau] = -a\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) + b\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) = b - (a+b)\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b).$$

$\square$

Wir schreiben $\mathbf{P}_x$ für die Verteilung von $(B_t + x)_{t \geq 0}$, wobei B Standard-Brownsche Bewegung, $\mathbb{E}_x$ für Erwartungswerte unter $\mathbf{P}_x$.

Satz 1.18. Die Brownsche Bewegung (B_t) mit Verteilungen $(\mathbf{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ besitzt die starke Markov-Eigenschaft, d.h.

$$\mathbb{E}_x[F((B_{t+\tau})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] \quad (f.s.)$$

für $F : (\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. und messbar, τ f.s. endliche Stoppzeit.

(Die schwache Markov-Eigenschaft ist klar, vgl. z.B. [St2, Bsp. 6.19] oder [Kl, Kap. 14.4, speziell Bsp. 14.48], siehe auch Erinnerung 1.2.)

Beweis. Es genügt, Funktionen

$$F(B) = f(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \quad \text{und } f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ ste., beschr.}$$

zu betrachten (Erwartungswerte solcher Funktionen legen die Vert. auf $(\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}$ fest).

$$x \mapsto \mathbb{E}_x[F(B)] \quad \text{ist stetig und beschränkt}$$

(verw. explizite Form als Gaußsches Integral).

$\tau_n := 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor$ ist Stoppzeit, $\tau_n \searrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] &= \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_n+t_1}, \dots, B_{\tau_n+t_k}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] \\ &= \mathbb{E}_{B_{\tau_n}}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] \end{aligned}$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden, dass Markov-Prozesse in diskreter Zeit (wir verwenden hier $2^{-n}\mathbb{N}_0$) stets die starke Markov-Eigenschaft besitzen (vgl. [St2, Satz 6.27] oder [Kl, Satz 17.14]) und für die Konvergenzaussage die Pfadstetigkeit von B ausnutzen.

Weiter ist

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \left[\left| \mathbb{E}_x[F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] - \mathbb{E}_x[F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[\left| F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) - F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Stetigkeit der Pfade von } B), \end{aligned}$$

also

$$\mathbb{E}_{B_\tau}[F(B)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[F((B_{\tau_n+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_{\tau_n}] = \mathbb{E}_x[F((B_{\tau+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_\tau]$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden, dass $\bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$ (Rechtsstetigkeit der Filtration).

□

Bemerkung 1.19. Abstrakt betrachtet entnehmen wir dem Beweis von Satz 1.18: Wenn ein Markov-Prozess X rechtsstetige Pfade hat und die zugehörige Übergangshalbgruppe die Feller-Eigenschaft⁴ besitzt (d.h. sie bildet stetige Funktionen in stetige Funktionen ab), so besitzt X auch die starke Markov-Eigenschaft (vgl. auch Diskussion in [St2, Kap. 6.4]).

⁴Eine Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ von positiven Kontraktionsoperatoren auf einem lokalkompakten Raum E heißt eine Fellersche Halbgruppe (benannt nach William Feller, 1906–1970), vgl. z.B. [Kl, Kap. 21.4, insbes. Def. 21.26] oder [Ka, Ch. 19] (die Def. ist auf S. 369), wenn $P_t(C_0(E)) \subset C_0(E)$ wobei $C_0(E) = \{\text{stetige Funktionen auf } E, \text{ die im Unendlichen verschwinden}\}$ und $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$ für jedes $x \in E$, $f \in C_0(E)$ gilt (dies impliziert $P_t f \rightarrow f$ für $t \rightarrow 0$ im Sinne der Sup-Norm für jedes $f \in C_0(E)$, d.h. starke Stetigkeit der Halbgruppe, z.B. [Ka, Thm. 19.6]).

Satz 1.20 (Spiegelungsprinzip). *B eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, für $a > 0, T > 0$ gilt*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} B_t \geq a\right) = 2\mathbb{P}(B_T \geq a).$$

Beweis. Sei τ f.s. endliche Stopppzeit, zeige

$$\tilde{B}_t := B_{\tau \wedge t} - (B_t - B_{\tau \wedge t}), \quad t \geq 0 \quad \text{ist ebenfalls BB.} \quad (1.13)$$

Sei $B^\tau = (B_t^\tau)_t := (B_{t \wedge \tau})_t$ (gestoppte BB), $B'_t := B_{\tau+t} - B_\tau$ ist BB, u.a. von $\mathcal{F}_\tau$ (starke Markov-Eigenschaft, Satz 1.18), also

$$(\tau, B^\tau, B') \stackrel{d}{=} (\tau, B^\tau, -B').$$

Wegen $B_t = B_t^\tau + B'_{(t-\tau)^+}$, $\tilde{B}_t = B_t^\tau - B'_{(t-\tau)^+}$ folgt (1.13).

Sei $M_t := \sup_{s \leq t} B_s$, $\tau := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$. Nach obigem ist

$$\mathbb{P}(M_T \geq a, B_T < a) = \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T > a) = \mathbb{P}(B_T > a),$$

also

$$\mathbb{P}(M_T \geq a) = \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T < a) + \mathbb{P}(M_T \geq a, B_T > a) + \underbrace{\mathbb{P}(M_T \geq a, B_T = a)}_{=0} = 2\mathbb{P}(B_T > a).$$

□

Satz 1.21 (Lévy's Arcussinus-Gesetz). *B eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, $T > 0$, $\zeta_T := \sup\{t \leq T : B_t = 0\}$.*

$$\mathbb{P}(\zeta_T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t/T}), \quad 0 \leq t \leq T$$

Beachte: ζ_T hat Dichte $\frac{1}{\pi T} 1/\sqrt{(t/T)(1-t/T)}$, d.h. Beta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) umskaliert auf $[0, T]$ (denn $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$), insbesondere ist ζ_T symmetrisch um $T/2$ verteilt.

Beweis. Sei o.E. $T = 1$ (verwende Skalierungseigenschaft der BB).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_1 \leq t) &= \mathbb{P}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (t, 1]) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (t, 1] \mid B_t = a) \mathbb{P}(B_t \in da) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_{|a|}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (0, 1-t]) \mathbb{P}(B_t \in da) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|a|}(B_s \neq 0 \text{ für } s \in (0, 1-t]) &= \mathbb{P}_0\left(\inf_{s \leq 1-t} B_s > -|a|\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(\sup_{s \leq 1-t} B_s < |a|\right) = 1 - 2\mathbb{P}_0(B_{1-t} > |a|) = \mathbb{P}_0(|B_{1-t}| \leq |a|) \end{aligned}$$

gemäß Spiegelungsprinzip (Satz 1.20). Demnach (mit B' einer u.a. Kopie der BB und X, Y u.a., $\sim \mathcal{N}(0, 1)$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\zeta_1 \leq t) &= \mathbb{P}(|B'_{1-t}| \leq |B_t|) = \mathbb{P}(\sqrt{1-t}|Y| \leq \sqrt{t}|X|) = \mathbb{P}(Y^2 \leq t(X^2 + Y^2)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)/2} \mathbf{1}_{\{y^2 \leq t(x^2+y^2)\}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{1}_{\{\sin^2(\varphi) \leq t\}} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile in Polarkoordinaten integrieren (beachte $y^2/(x^2+y^2) = \sin^2(\varphi)$). $\square$

1.3 Donskers Invarianzprinzip

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. reelle ZVn mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\text{Var}[X_1] = 1$,

$$S_t := \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} X_k + (t - \lfloor t \rfloor) X_{\lfloor t \rfloor + 1}, \quad t \geq 0.$$

$(S_t)_{t \geq 0}$ ist eine ZV mit Werten in den stetigen Pfaden.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist folgender Satz, sozusagen ein „großer Bruder des ZGWS“. Wir betrachten als Wertebereich $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ mit Metrik $d(f, g) := \|f - g\|_{\infty}$; dies ist ein polnischer Raum (für Separabilität verwende z.B. Polynome mit rationalen Koeffizienten).

Satz 1.22 (Donskers Invarianzprinzip). *Es gilt*

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} (B_t)_{t \in [0,1]}$$

mit (B_t) Standard-Brownbewegung

Wir führen den Beweis durch Einbettung, dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.23 (Skorokhod⁵-Einbettung). *X reelle ZV mit $\mathbb{E}[X] = 0$, $\text{Var}[X] = \sigma^2 < \infty$, dann gibt es eine Stoppzeit τ mit*

$$\mathcal{L}(B_{\tau}) = \mathcal{L}(X) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\tau] = \sigma^2.$$

Die Forderung $\mathbb{E}[\tau] = \sigma^2 (< \infty)$ ist entscheidend, sonst könnte man das Problem ziemlich trivial lösen via $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = X\}$ mit X unabhängig von B .

Beweis. Für $\mathcal{L}(X) = \frac{b}{a+b} \delta_{-a} + \frac{a}{a+b} \delta_b$ mit $a, b > 0$ (also $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = ab$ liefert

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$$

das Gewünschte (Übungsaufgabe, vgl. auch Bsp. 1.17; die entscheidende Beobachtung ist, dass $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist).

⁵Anatoly Volodomyrovych Skorokhod, 1930–2011

Der allgemeine Fall durch Mischung :

Sei $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = \sigma^2 < \infty$, dann gibt es $\theta \in \mathcal{M}_1((-\infty, 0] \times [0, \infty))$ mit

$$\mu = \int_{(-\infty, 0] \times [0, \infty)} \left(\frac{v}{v-u} \delta_u + \frac{-u}{v-u} \delta_v \right) \theta(d(u, v)). \quad (1.14)$$

Sei $m := \int_{(0, \infty)} v \mu(dv) = - \int_{(-\infty, 0)} u \mu(du)$,

$$\theta(d(u, v)) := \frac{1}{m} (v-u) \mu(du) \mu(dv) + \mu(\{0\}) \delta_{(0,0)}(du, dv), \quad v \geq 0, u \leq 0$$

leistet das Gewünschte:

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} \theta(d(u, v)) &= \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \int_{(0, \infty)} \mu(dv) (v-u) \\ &= \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) (m - u \mu((0, \infty))) = \frac{1}{m} (m \mu((-\infty, 0)) + m \mu((0, \infty))) = \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \end{aligned}$$

d.h. μ ist ein W'maß und

$$\begin{aligned} &\int_{(-\infty, 0] \times [0, \infty)} \left(\frac{v}{v-u} \delta_u + \frac{-u}{v-u} \delta_v \right) \theta(d(u, v)) \\ &= \mu(\{0\}) \delta_0 + \frac{1}{m} \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \int_{(0, \infty)} \mu(dv) (v \delta_u - u \delta_v) \\ &= \mu(\{0\}) \delta_0 + \int_{(-\infty, 0)} \mu(du) \delta_u + \int_{(0, \infty)} \mu(dv) \delta_v = \mu. \end{aligned}$$

Sei $(U, V) \sim \theta$, u.a. von $(B_t)_{t \geq 0}$, dann leistet

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = U \text{ oder } B_t = V\}$$

das Gewünschte. □

Beweis von Satz 1.22. Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ Standard-BB, konstruiere mittels Skorokhod-Einbettung (Lemma 1.23) und der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.18) Folge von Stoppzeiten $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ so dass mit $\tilde{X}_n := B_{\tau_n} - B_{\tau_{n-1}}$ gilt

$$(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{d}{=} (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\tau_n - \tau_{n-1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist u.i.v. mit } \mathbb{E}[\tau_1 - \tau_0] = 1.$$

Sei

$$\tilde{S}_t := \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \tilde{X}_k + (t - \lfloor t \rfloor) \tilde{X}_{\lfloor t \rfloor + 1}, \quad t \geq 0,$$

also $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (S_t)_{t \geq 0}$. Zeige

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{\lfloor r \rfloor} - B_r| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{stochastisch.} \quad (1.15)$$

Es gilt

$$\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\tau_1] = 1 \quad \text{f.s.}$$

(mit dem starken Gesetz der großen Zahlen), also auch $\frac{\tau_{[r]}}{r} \rightarrow 1$ f.s. für $r \rightarrow \infty$ und

$$\delta_n := \sup_{0 \leq r \leq n} |\tau_{[r]} - r| \quad \text{erfüllt} \quad \frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.}$$

Sei

$$w(B, t, h) := \sup_{0 \leq u < v \leq t, v-u \leq h} |B_v - B_u|$$

(wir wissen: $w(B, t, h) \leq C_{t,\gamma} h^\gamma$ f.s. für (jedes) $\gamma < 1/2$ nach Satz 1.5 und Kor. 1.7).

Für $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, h > 0$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{[r]} - B_r| > \varepsilon\right) &\leq \underbrace{\mathbb{P}(w(B, n + nh, nh) > \varepsilon \sqrt{n})}_{= P(w(B, 1 + h, h) > \varepsilon) \xrightarrow{h \searrow 0} 0} + \underbrace{\mathbb{P}(\delta_n > nh)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \\ &\quad \text{(Skalierungseigensch. der BB)} \end{aligned}$$

d.h. mit $n \rightarrow \infty$, dann $h \rightarrow 0$ folgt (1.15).

Analog gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq r \leq n} |\tilde{S}_{[r]+1} - B_r| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ stochastisch, somit

$$\Delta_n := \sup_{0 \leq r \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} |\tilde{S}_r - B_r| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{stochastisch.}$$

Sei $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Für $\varepsilon, \delta > 0$ sei

$$F_{\varepsilon, \delta} := \{f \in C([0, 1]) : \forall g \in C([0, 1]) \text{ mit } \|f - g\|_\infty < \delta \text{ gilt } |\varphi(f) - \varphi(g)| < \varepsilon\},$$

es ist $F_{\varepsilon, \delta} \nearrow C([0, 1])$ für $\delta \downarrow 0$. Somit

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left((S_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left((B_t)_{t \in [0, 1]}\right)\right] \right| &= \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left((\tilde{S}_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left((B_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right] \right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left((\tilde{S}_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right) - \varphi\left((B_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right|\right] \\ &\leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty (\mathbb{P}(B \notin F_{\varepsilon, \delta}) + \mathbb{P}(\Delta_n \geq \delta)), \end{aligned}$$

mit $n \rightarrow \infty$, dann $\delta \downarrow 0$, $\varepsilon \downarrow 0$ folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E}\left[\varphi\left((S_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi\left((B_t)_{t \in [0, 1]}\right)\right] \right| = 0.$$

□

Beispiel 1.24. I. Für $f \in C([0, 1])$ sei $\varphi(f) := \psi(f(1))$ mit einem $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so ist

$$E[\varphi(B)] = \mathbb{E}[\psi(B_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\varphi\left((S_{nt}/n^{1/2})_{t \in [0, 1]}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\psi(S_n/n^{1/2})\right],$$

d.h. Satz 1.22 impliziert den ZGWS.

Analog gilt eine multivariate Form, d.h. für $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $t_1 < \dots < t_k$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\psi(S_{[t_1 n]}/n^{1/2}, S_{[t_2 n]}/n^{1/2}, \dots, S_{[t_k n]}/n^{1/2})] = \mathbb{E}[\psi(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})].$$

2. Für $f \in C([0, 1])$ sei $\varphi(f) := \psi(\max_{0 \leq t \leq 1} f(t))$ mit einem $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so folgt mit Satz 1.22

$$\max_{r \leq n} \frac{S_r}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \max_{t \leq 1} B_t,$$

mit Satz 1.20 (beachte: die Vert. von $\max_{t \leq 1} B_t$ hat keine Atome) also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{r \leq n} \frac{S_r}{\sqrt{n}} > x\right) = 2\mathbb{P}(B_1 > x) \quad \text{für } x \in [0, \infty). \quad (1.16)$$

Vgl. auch die explizite Abschätzung für festes n , z.B. [St2, Satz 6.28] oder [Kl, Satz 17.15, Spiegelungsprinzip in diskreter Zeit]:

$$\mathbb{P}\left(\max_{m \leq n} S_m \geq x\right) \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq x) - \mathbb{P}(S_n = x)$$

(mit Gleichheit, wenn Inkremente nur Werte aus $\{-1, 0, 1\}$ annehmen); man beachte, dass für (1.16) keine Annahmen an die Verteilung von S_1 über die ersten zwei Momente hinaus benötigt werden (während [St2, Satz 6.28] / [Kl, Satz 17.15] benötigt, dass die Inkremente symmetrisch verteilt sind).

Kapitel 2

Stochastische Integration

2.1 Zur Motivation

Integration bezüglich nicht-glatte Pfade Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f sei stetig. Welchen Sinn können wir $\int_0^t f_s dg_s$ geben?

1. Falls $g \in C^1$: $\int_0^t f_s dg_s = \int_0^t f_s g'_s ds$ (als Riemann-[Stieltjes-]Integral).
2. Falls g nicht-fallend (und, sagen wir, rechtsstetig): Fasse g als Verteilungsfunktion eines Maßes μ_g auf $\mathbb{R}_+$ auf, $\mu_g((0, t]) = g(t) - g(0)$, so ist $\int_0^t f_s dg_s = \int_{(0, t]} f_s \mu_g(ds)$ (als Lebesgue-Stieltjes-Integral, vgl. z.B. [Kl, Def. 1.57]).
3. Falls $g = g_1 - g_2$ mit g_1, g_2 nicht-fallend, so ist $\int_0^t f_s dg_s = \int_0^t f_s dg_{1,s} - \int_0^t f_s dg_{2,s}$.

Eine solche sog. Jordan-Zerlegung von g existiert g.d.w.

$$V_t(g) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k=t} \sum_{i=1}^k |g_{t_i} - g_{t_{i-1}}| < \infty$$

(„ g hat endliche Variation“).

Siehe z.B. [Ka, Prob. 2.18], vgl. auch Bem. 2.7 unten.

Die Pfade der Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ haben mit W'keit 1 unendliche Variation für jedes $t > 0$, denn die quadratische Variation ist > 0 :

$$V_t(B) \geq \sup_n \frac{1}{\sup\{|B_v - B_u| : 0 \leq u < v < u + 2^{-n} \leq t\}} \sum_{k=1}^{2^n} |B_{tk/2^n} - B_{t(k-1)/2^n}|^2 = \infty$$

daher kann man

$$\int_0^t X_s dB_s = ??$$

nicht in obigem Sinne „realisierungsweise“ definieren.

Vorschau Im diskreten Fall gilt (unter geeign. Bedingungen, vgl. [St2, Lemma B.10] oder [Kl, Satz 9.39]): $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal, (C_n) previsibel, so ist $(C \bullet M)_n := \sum_{j=1}^n C_j (M_j - M_{j-1})$ ein Martingal.

Wir werden (in Analogie dazu) sehen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_{\frac{k-1}{n}} (B_{\frac{k}{n} \wedge t} - B_{\frac{k-1}{n} \wedge t}) \longrightarrow \int_0^t X_{s(-)} dB_s \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(in geeignetem Sinne, für eine noch zu klärende Klasse von Integranden X).

In dem R-Skript `reskalierte_MK_und_Diffusionen.R` betrachten wir Simulationen von diskreten Approximation zufälliger Pfade $X = (X_t)_t$, die „lokal ungefähr wie eine Brownsche Bewegung“ aussehen, d.h.

$$\mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | X_t = x] = h\mu(x) + o(h), \quad \text{Var}[X_{t+h} - X_t | X_t = x] = h\sigma^2(x) + o(h).$$

für geeignete Funktionen μ und σ^2 .

Obiges sog. Itô-Integral wird uns gestatten, solche Prozesse X als Lösungen von

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

in einem mathematisch präzisen Sinn zu konstruieren.

2.2 (Einige Eigenschaften) zeitstetige(r) Martingale

Definition 2.1. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ stochastischer Prozess (mit Werten in $(E, \mathcal{B}(E))$) auf filtriertem W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

X heißt *adaptiert*, wenn für jedes $t \geq 0$ gilt: X_t ist $\mathcal{F}_t$ -messbar.

X *progressiv messbar*, wenn für jedes $t \geq 0$ gilt: $\Omega \times [0, t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ ist $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ - $\mathcal{B}(E)$ -messbar.

Offensichtlich gilt

$$X \text{ progressiv messbar} \Rightarrow X \text{ adaptiert}$$

sowie

$$X \text{ adaptiert mit (rechts)stetigen Pfaden} \Rightarrow X \text{ progressiv messbar.}$$

Progressive Messbarkeit ist wichtig für das Zusammenspiel mit Stoppzeiten (der zu einer Stoppzeit τ ausgewertete Prozess X_τ ist an die entsprechende Vergangenheit $\mathcal{F}_\tau$ adaptiert, vgl. z.B. [RY, Prop. I.(4.8)] oder [Ka, Lemma 7.5]); weiter erlaubt progressive Messbarkeit von X insbesondere „Analysis-Operationen“ wie $\int_0^t f(X_s) ds$ (dafür würde es allerdings auch schon ausreichen, dass $\Omega \times [0, \infty) \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - $\mathcal{B}(E)$ -messbar ist).

Definition 2.2. Ein filtrierter W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ genügt den *üblichen Bedingungen* (hypotheses habituelles), wenn gilt

1. $\mathcal{F}_0$ enthält alle $\mathbb{P}$ -Nullmengen (d.h. $N \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(N) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{F}_0$) und
2. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist rechtsstetig (d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ für jedes $t \geq 0$).

Bemerkung 1.) erzwingt, dass ein von einem adaptierten Prozess $(\mathbb{P})$ -ununterscheidbarer Prozess ebenfalls adaptiert ist.

2.) erzwingt z.B., dass die Zeit des ersten Eintritts in eine offene Menge eine Stoppzeit ist.

Wir werden im Folgenden zumeist stillschweigend annehmen, dass der zugrundeliegende W -raum die üblichen Bedingungen erfüllt, es sei denn, dass wir explizit abweichende Voraussetzungen formulieren.

Beispiel 2.3. Sei $\Omega = C([0, \infty)) (= \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\})$, $\mathcal{F}_t := \sigma(\omega(s) : s \leq t)$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, $\mathbb{W}_x, x \in \mathbb{R}$ das (1-dim) Wienermaß bei Start in x . (d.h. die Vert. der BB startend in x , aufgefasst als W -maß auf Ω , siehe Def 1.1 und Kor. 1.7).

Setze $\overline{\mathcal{F}}_t := \{A \in \mathcal{A} : \exists B \in \mathcal{F}_t \text{ mit } \mathbb{W}_0(A \Delta B) = 0\}, t \geq 0$. Es gilt

1. $\mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}}_t$ für $t \geq 0$

2. $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ ist rechtsstetig

3. $(\Omega, \mathcal{A}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{W}_0)$ erfüllt die üblichen Bedingungen.

(Dies ist eine kleine Ergänzung zu Bem. 1.13, dort hatten wir bereits die rechtsstetige Vervollständigung der kanonischen Filtration der Brownschen Bewegung betrachtet.)

Beweis. 1. Zeige

Für $A \in \mathcal{A}$ gibt es ein beschr., $\mathcal{F}_t$ -messbares Y mit $\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = Y$ $\mathbb{W}_0$ -f.s. (2.1)

(Bem.: (2.1) kann als eine Verallgemeinerung von Blumenthals 0-1-Gesetz, Satz 1.9 angesehen werden.)

Für

$$A = \{X_{t_0} \in D_0, \dots, X_{t_k} \in D_k, X_{t+s_1} \in D_{k+1}, \dots, X_{t+s_\ell} \in D_{k+\ell}\} \quad (2.2)$$

mit $k, \ell \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t, 0 < s_1 < \dots < s_\ell, D_1, \dots, D_{k+\ell} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+1/n}] = \mathbf{1}_{\{X_{t_0} \in D_0, \dots, X_{t_k} \in D_k\}} \mathbb{W}_{X_t}(X_{s_1} \in D_{k+1}, \dots, X_{s_\ell} \in D_{k+\ell}), \quad (2.3)$$

$\mathbb{W}_0$ -f.s. was $\mathcal{F}_t$ -m.b. ist, d.h. (2.1) gilt für solche A . Hierbei haben wir für das erste Gleichheitszeichen den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (z.B. [St2, Satz 1.13] oder [Kl, Satz 12.14]) und für das zweite Gleichheitszeichen die (schwache) Markov-Eigenschaft und die Stetigkeit der Pfade ausgenutzt. Da A s der Form (2.2) einen $\cap$ -stabilen Erzeuger von $\mathcal{A}$ bilden, gilt (2.1).

Für $A \in \mathcal{F}_{t+}$ ist demnach $\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{t+}] = Y$ $\mathbb{W}_0$ -f.s. mit Y $\mathcal{F}_t$ -m.b., insbes. $\{Y = 1\} \in \mathcal{F}_t$ und $\mathbb{W}_0(A \Delta \{Y = 1\}) = 0$, d.h. $A \in \overline{\mathcal{F}}_t$, somit gilt 1.

2. Sei $A \in \overline{\mathcal{F}}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}$, insbes. zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es

$$B_n \in \mathcal{F}_{t+1/n} \text{ mit } \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{B_n} \text{ } \mathbb{W}_0\text{-f.s.,}$$

es ist $B := \limsup_n B_n (= \bigcap_n \cup_{m \geq n} B_m) \in \mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}}_t$ nach 1., also

gibt es ein $C \in \mathcal{F}_t$ mit $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_C$ $\mathbb{W}_0$ -f.s. und somit $A \in \overline{\mathcal{F}}_t$ nach Def.,

d.h. 2. gilt.

3. Sei $\mathbb{W}_0(N) = 0$, also auch $\mathbb{W}_0(N \Delta \emptyset) = 0$ mit $\emptyset \in \mathcal{F}_0$ und somit $N \in \overline{\mathcal{F}}_0$ nach Def., Rechtssteigkeit von $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ wurde in 2. gezeigt. $\square$

Proposition 2.4 (Doob-Ungleichungen, zeitstetiger Fall). *Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal oder ein nicht-negatives Submartingal, X habe rechtsstetige Pfade. Dann gilt für $t \geq 0$*

1. $\lambda \mathbb{P}(\sup_{0 \leq u \leq t} X_u \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[|X_t|]$ für $\lambda \geq 0$,
2. $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$ für $p \in (1, \infty)$.

Beweis. 1. und 2. gelten im zeitdiskreten Fall (vgl. z.B. [St2, Satz B.40] oder [Kl, Satz 11.2]).

Sei $\tilde{\lambda} < \lambda$. Es ist

$$\tilde{\lambda} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq u \leq t} X_u > \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{m \leq 2^n} X_{mt/2^n} > \tilde{\lambda}) \leq \mathbb{E}[|X_t|] \quad (2.4)$$

wobei wir für das Gleichheitszeichen die (Rechts-)Stetigkeit der Pfade von X ausgenutzt haben. Mit $\tilde{\lambda} \nearrow \lambda$ folgt 1.

2. Analog ist

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u|^p] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\max_{m \leq 2^n} |X_{mt/2^n}|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p], \quad (2.5)$$

wobei wir für das Gleichheitszeichen wiederum die (Rechts-)Stetigkeit der Pfade von X und den Satz von der monotonen Konvergenz verwendet haben. $\square$

Definition 2.5. Ein Martingal $M = (M_t)_{t \geq 0}$ heißt *quadratintegrierbar*, wenn $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ für alle $t \geq 0$. $\mathcal{M}_2^c$ bezeichne die Menge der quadratintegrierbaren Martingale mit stetigen Pfaden (bezüglich einem vorgegebenen filtrierten $\mathbb{W}$ -raum).

Definition 2.6. Für einen (zufälligen oder deterministischen) reellwertigen Pfad $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt

$$V_t(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}, 0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=t} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|$$

die *Totalvariation* (von X zur Zeit t).

X hat *endliche Variation*, wenn $V_t(X) < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Bemerkung 2.7. 1. $t \mapsto V_t(X)$ ist nicht-fallend.

2. Falls $t \mapsto X_t$ nicht-fallend, so ist $V_t(X) = X_t - X_0 < \infty$.
3. Haben X und Y endliche Variation, so auch $X + Y$, $X - Y$.
4. X hat endliche Variation $\Leftrightarrow$ es gibt Y, Z nicht-fallend mit $X = Y - Z$.

Beweis. 1., 2., 3. und 4. „ $\Leftarrow$ “ sind klar.

Zu 4. „ $\Rightarrow$ “: Für $t_{i-1} < t_i$ ist $|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 2(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^- + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$, also gilt für jede Zerlegung

$$\sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 2 \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^- + X_t - X_0.$$

Bilde Supremum über alle Zerlegungen von $[0, t]$:

$$V_t(X) = 2V_t^-(X) + X_t - X_0$$

mit $V_t^-(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}, 0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=t} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^-$, also

$$X_t = X_0 + V_t(X) - 2V_t^-(X)$$

und $t \mapsto X_0 + V_t(X)$, $t \mapsto 2V_t^-(X)$ sind nicht-fallend. $\square$

Satz 2.8. Sei M stetiges Martingal mit $V_t(M) < \infty$ f.s. für jedes $t > 0$. Dann ist M fast sicher konstant.

Beweis. Wir nehmen o.E. an $M_0 = 0$, sonst betrachte $\tilde{M}_t := M_t - M_0$.

$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\} \wedge \inf\{t \geq 0 : V_t(M) \geq n\}$ ist Stoppzeit und es gilt $\tau_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ f.s. $M^{(n)} := (M_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$ ist dann ein beschränktes Martingal mit (uniform in t) beschränkter Totalvariation.

Sei also o.E. M beschränkt mit (gleichmäßig) beschränkter Totalvariation.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{2^\ell} M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k,k'=1}^{2^\ell} \mathbb{E}\left[(M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell})(M_{k't/2^\ell} - M_{(k'-1)t/2^\ell})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{2^\ell} (M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell})^2\right] \\ &\leq \underbrace{\mathbb{E}\left[\max_{k \leq 2^\ell} |M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}|\right]}_{\rightarrow 0 \text{ mit } \ell \rightarrow \infty \text{ (Stetigk.)}} \times \underbrace{\sum_{k=1}^{2^\ell} |M_{kt/2^\ell} - M_{(k-1)t/2^\ell}|}_{\leq V_t(M) \leq V_\infty(M) < \infty} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Gleichheitszeichen die $\mathcal{L}^2$ -Orthogonalität der Martingalinkremente und in der letzten Zeile den Satz von der dominierten Konvergenz verwendet haben.

Somit $\mathbb{E}[M_t^2] = 0$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{M_t = 0\}\right) = 1$, Stetigkeit der Pfade liefert $M_t \equiv 0$ f.s. $\square$

Satz 2.9. Für $X \in \mathcal{M}_2^c$ sei $\|X\| := \|X\|_{\mathcal{M}_2^c} := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \wedge 1)$.

$(\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|)$ ist ein vollständiger metrischer Raum (wenn man ununterscheidbare Prozesse identifiziert).

Beobachtung 2.10. I. Für $X \in \mathcal{M}_2^c$ ist (X_t^2) ein Submartingal, insbesondere ist $t \mapsto (\mathbb{E}[X_t^2])^{1/2}$ nicht-fallend.

2. Für $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\|X - Y\| = 0$ gilt $\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ für alle } t \geq 0) = 1$, d.h. X und Y sind ununterscheidbar (im Sinne von Def. 1.3):

$\|X - Y\| = 0$ impliziert $\mathbb{E}[(X_n - Y_n)^2] = 0$, woraus mit Doob's $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung (Prop. 2.4) folgt, dass $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq n} |X_u - Y_u|^2] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis von Satz 2.9. $\|\cdot\|$ ist eine (Pseudo-)Metrik auf $\mathcal{M}_2^c$ (denn die $\mathcal{L}^2$ -Norm erfüllt die Dreiecksungleichung).

Sei $\{X^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}_2^c$ Cauchy-Folge, d.h. $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X^{(m)}\| = 0$.

Insbesondere ist für jedes $t \geq 0$ $\{X_t^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$

$\Rightarrow \exists X_t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ mit $X_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X_t$.

Zeige: (X_t) ist Martingal. Für $A \in \mathcal{A}$, $t \geq 0$ ist

$$\lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_A |X_t^{(n)} - X_t|] \leq \mathbb{P}(A)^{1/2} \left(\lim_n \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t)^2] \right)^{1/2} = 0$$

mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung, also gilt für $0 \leq s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t - X_s)] = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t^{(n)} - X_s^{(n)})]}_{=0 \text{ (} X^{(n)} \text{ ist Martingal)}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_s^{(n)} - X_s)]}_{\rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty} - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A (X_t^{(n)} - X_t)]}_{\rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty} = 0.$$

Zeige: (X_t) hat (f.s.) stetige Pfade.

Sei $T > 0$. Zunächst stellen wir sicher, dass X eine Version mit rechtsstetigen Pfaden besitzt (um die Doob-Ungleichung anwenden zu können): setze für $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$ $X_t := \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$ und dann für allgemeines $t \in [0, T]$ $X_t := \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s$, dies ist eine rechtsstetige Version von X , da die Filtration rechtsstetig ist.

Nun ist

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t|^2\right] \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \|X_T^{(n)} - X_T\|_{\mathcal{L}^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mit Doob-Ungleichung (Prop. 2.4), demnach gibt es eine Teilfolge $n_k \nearrow \infty$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n_k)} - X_t| \geq \frac{1}{k}\right) < \infty.$$

Borel-Cantelli liefert $X_t^{(n_k)} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} X_t$ gleichmäßig in $t \leq T$ f.s., d.h. $(X_t)_{t \in [0, T]}$ hat stetige Pfade f.s. (und da dies für bel. $T > 0$ gilt, folgt die Beh.) $\square$

Bemerkung 2.11. Der Beweis von Satz 2.9 zeigt insbesondere:

$X, X^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$, so gilt

$$\forall T > 0, \varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. die Pfade konvergieren lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.

Vorbemerkung zur quadratischen Variation Für die BB ist $B_t^2 - t$ ein Martingal (Übung).

Sei (X_t) ein allgemeineres stetiges Martingal, was müssen wir von dem Submartingal (X_t^2) abziehen, damit es ein Martingal wird?

Im zeitdiskreten Fall gilt (vgl. [St2, Lemma B.35] oder [Kl, Satz 10.1 und Def. 10.3]):

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ $\mathcal{L}^2$ -Martingal, $A_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] (= \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}^2))$ ($A_0 := 0$), (A_n) hat nicht-fallende Pfade, ist previsibel (A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$ -m.b.) und $(X_n^2 - A_n)$ ist Martingal.

Gesucht: ein Analogon im zeitkontinuierlichen Fall

Satz 2.12. Sei $(M_t)_t \in \mathcal{M}_2^c$ (und der zugrundeliegende W -Raum erfülle die üblichen Bedingungen, Def. 2.2). Dann gibt es einen adaptierten Prozess $(A_t)_{t \geq 0}$ mit stetigen, nicht-fallenden Pfaden und $A_0 = 0$, so dass gilt

1. $\mathbb{E}[A_t] < \infty$ für alle $t \geq 0$ und
2. $(M_t^2 - A_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal.

(A_t) ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit (d.h. falls (A'_t) ebenfalls obige Eigenschaften besitzt, so ist $\mathbb{P}(A_t = A'_t \text{ für alle } t \geq 0) = 1$).

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 2.12 benötigen wir:

Definition 2.13. Ein linksstetiger stochastischer Prozess $(H_t)_{t \geq 0}$ der Form

$$H_t = \sum_{k \geq 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t), \quad t \geq 0,$$

wo $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ eine (endliche oder abzählbare) Folge von Stoppzeiten ohne Häufungspunkt im Endlichen ist (d.h. $\tau_k \nearrow \infty$ f.s., wenn es unendlich viele sind) und ξ_k eine beschränkte, $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -messbare reelle ZV für $k \in \mathbb{N}$, heißt ein *elementarer Integrand* (auch: ein *einfacher previsibler Prozess*).

Für (H_t) dieser Form und einen (beliebigen) reellwertigen Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ definieren wir

$$\int_0^t H_s dX_s := \sum_{k \geq 1} \xi_k (X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}), \quad t \geq 0,$$

das *elementare stochastische Integral* (von H bezüglich X). Man beachte: in der Summe sind f.s. nur endlich viele Summanden $\neq 0$.

Man schreibt auch $(H \bullet X)_t := \int_0^t H dX := \int_0^t H_s dX_s$.

Bemerkung 2.14 (Linearität des elementaren Integrals). $(H_t), (J_t)$ elementare Integranden, $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch $(aH_t + bJ_t)_{t \geq 0}$ ein elementarer Integrand und es gilt

$$\int_0^t (aH + bJ) dX = a \int_0^t H dX + b \int_0^t J dX.$$

Zum Beweis gehe zu einer gemeinsamen Verfeinerung der jeweils zugrundeliegenden Stoppfolgen über.

Lemma 2.15. (H_t) elementarer Integrand mit $\sup_{t \geq 0} |H_t| \leq c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}_+$, $(X_t) \in \mathcal{M}_2^c$ mit $X_0 = 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2] \quad \text{und} \quad \left(\int_0^t H dX\right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c. \quad (2.6)$$

Beweis. $t \mapsto \int_0^t H dX$ ist stetig (n. Konstr.) ✓

Sei $s < t$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) | \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}] \\ &= \xi_k\left(\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{k+1}} | \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}] - \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_k} | \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}]\right) \quad (\xi_k \text{ ist } \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}\text{-m.b.}) \\ &= \xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1} \wedge (s \vee \tau_k)} - X_{t \wedge \tau_k \wedge (s \vee \tau_k)}) \quad (\text{Optional sampling, Satz 1.16}) \\ &= \xi_k\left(\underbrace{\mathbf{1}_{\{s < \tau_k\}}(X_{t \wedge \tau_k} - X_{t \wedge \tau_k})}_{=0} + \underbrace{\mathbf{1}_{\{s \geq \tau_k\}}(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k})}_{=(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k})}\right) = \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}), \end{aligned}$$

was $\mathcal{F}_s$ -m.b. ist, somit

$$\mathbb{E}[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\dots | \mathcal{F}_{s \vee \tau_k}] | \mathcal{F}_s] = \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}) \quad (2.7)$$

Betr. zunächst den Fall $H_t = \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, d.h. H besitzt nur endlich viele Sprungstellen. Für $s < t$ ist

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H dX \middle| \mathcal{F}_s\right] = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) | \mathcal{F}_s] \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{k=1}^m \xi_k(X_{s \wedge \tau_{k+1}} - X_{s \wedge \tau_k}) = \int_0^s H dX \quad \text{f.s.} \quad (2.8)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[\xi_k^2(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k})^2] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq m} \underbrace{\mathbb{E}[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \xi_\ell(X_{t \wedge \tau_{\ell+1}} - X_{t \wedge \tau_\ell})]}_{\substack{=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\dots | \mathcal{F}_{\tau_\ell}]] = \mathbb{E}[\xi_k(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k}) \xi_\ell \underbrace{\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{\ell+1}} - X_{t \wedge \tau_\ell} | \mathcal{F}_{\tau_\ell}]]_{=0}]} = 0 \\ &\leq c^2 \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau_{k+1}} - X_{t \wedge \tau_k})^2] \\ &= c^2 \mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau_{m+1}} - X_{t \wedge \tau_1})^2] = c^2 \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_{m+1}}^2] - c^2 \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_1}^2] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2], \end{aligned}$$

d.h. (2.6) gilt in diesem Fall (und die Schranke hängt nicht von m ab).

Im allg. Fall ist

$$H_t = \lim_{m \rightarrow \infty} H_t^{(m)} \quad \text{mit} \quad H_t^{(m)} := \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$$

und $\int_0^t H dX = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t H^{(m)} dX$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dX\right)^2\right] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^{(m)} dX\right)^2\right] \leq c^2 \mathbb{E}[X_t^2],$$

wobei wir für das erste Ungleichungszeichen das Lemma von Fatou verwendet haben. Demnach ist für jedes $T > 0$ die Familie von Martingalen $\left(\int_0^t H^{(m)} dX\right)_{0 \leq t \leq T}, m \in \mathbb{N}$ gleichmäßig $\mathcal{L}^2$ -beschränkt, insbesondere gleichgradig integrierbar und somit ist ihr Limes ebenfalls ein Martingal. $\square$

Beweis von Satz 2.12. Sei o.E. $M_0 = 0$ (sonst gehe zu $\tilde{M}_t := M_t - M_0$ über, $\tilde{M}_t^2 - M_t^2 = -2M_t M_0 + M_0^2$ ist ebenfalls Martingal).

Definiere Stoppzeiten

$$\tau_1^{(n)} := 0, \quad \tau_{k+1}^{(n)} := \inf \left\{ t > \tau_k^{(n)} : |M_t - M_{\tau_k^{(n)}}| = 2^{-n} \right\}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

(beachte: $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{\tau_k^{(n+1)}, k \in \mathbb{N}\}$ und für jedes n gilt $\tau_k^{(n)} \nearrow_{k \rightarrow \infty} \infty$ f.s., da M stetige Pfade hat).

Setze

$$\begin{aligned} H_t^{(n)} &:= \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \mathbf{1}_{(\tau_k^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}]}(t), \\ A_t^{(n)} &:= \sum_{k \geq 1} \left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \right)^2, \\ I_t^{(n)} &:= \int_0^t H^{(n)} dM = \sum_{k \geq 1} M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} \right), \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} M_t^2 - \underbrace{M_0^2}_{=0} &= \sum_{k \geq 1} \left\{ 2 \left(M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} - M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}^2 \right) + \left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}}^2 - 2 M_{t \wedge \tau_k^{(n)}} M_{t \wedge \tau_{k+1}^{(n)}} + M_{t \wedge \tau_k^{(n)}}^2 \right) \right\} \\ &= 2I_t^{(n)} + A_t^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nach Konstr. ist $\sup_{t \geq 0} |H_t^{(n)} - M_t| \leq 2^{-n}$, also $\sup_{t \geq 0} |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}| \leq 2^{-n} + 2^{-m} \Rightarrow$ (nach Lemma 2.15 [und Bem. 2.14])

$$\mathbb{E} \left[\left(I_t^{(n)} - I_t^{(m)} \right)^2 \right] \leq (2^{-n} + 2^{-m})^2 \mathbb{E} [M_t^2],$$

d.h. $\{I^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ ist Cauchy-Folge in $\mathcal{M}_2^c$. Mit Satz 2.9 folgt:

$$\exists I = (I_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c \quad \text{mit} \quad \|I^{(n)} - I\|_{\mathcal{M}_2^c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wähle (gemäß Bem. 2.11) eine Teilfolge $n_j \nearrow \infty$ mit

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \leq j} |I_t^{(n_j)} - I_t| \geq \frac{1}{j} \right) \leq \frac{1}{j^2},$$

dann gilt (mit Borel-Cantelli) für jedes $T > 0$

$$\sup_{t \leq T} |I_t^{(n_j)} - I_t| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.,}$$

demnach auch

$$A_t^{(n_j)} = M_t^2 - 2I_t^{(n_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A_t \quad \text{lokal gleichmaig f.s.} \quad \text{und } (A_t) \text{ hat stetige Pfade}$$

Weiter ist $A_0 = A_0^{(n_j)} = 0$ und nach Konstruktion gilt $\sup_{s \leq t} (A_s^{(n)} - A_t^{(n)}) \leq 2(2 \cdot 2^{-n})^2$ fur $n \in \mathbb{N}$, daher ist $t \mapsto A_t$ nicht-fallend.

Schließlich ist $(M_t^2 - A_t)_t = (2I_t)_t \in \mathcal{M}_2^c$.

Zur Eindeutigkeit: Sei (A'_t) ein weiterer Prozess mit den geforderten Eigenschaften, dann ist

$$Y_t := A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t), \quad t \geq 0$$

ein stetiges Martingal mit Pfaden von endlicher Variation (nach Bem. 2.7, 4.), nach Satz 2.8 also $Y_t \equiv 0$ f.s. $\square$

Definition 2.16. Fur $M \in \mathcal{M}_2^c$ heißt der Prozess (A_t) aus Satz 2.12 die *quadratische Variation* von M , er wird (meist) als $\langle M \rangle$ geschrieben (d.h. $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal). Man nennt $\langle M \rangle$ auch den „Klammerprozess“ (engl.: bracket process) von M .

Fur $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ definieren wir

$$\langle M, N \rangle_t := \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t), \quad t \geq 0,$$

die *quadratische Kovariation* von M und N .

Korollar 2.17. Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c$. $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$ ist der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige adaptierte Prozess mit stetigen Pfaden von (lokal) endlicher Variation mit

1. $\langle M, N \rangle_0 = 0$,
2. $M_t N_t - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle_t, t \geq 0$ ist ein stetiges Martingal.

Beweis. 1. $\checkmark$

Zu 2. beachte $M_t N_t = \frac{1}{4} ((M_t + N_t)^2 - (M_t - N_t)^2)$, Eindeutigkeit wie im Beweis von Satz 2.12: Sei (Z_t) ein weiterer Prozess mit den geforderten Eigenschaften, dann ist $\langle M, N \rangle_t - Z_t = (M_t N_t - Z_t) - (M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)$ ein stetiges Martingal mit (lokal) endlicher Variation $\Rightarrow \langle M, N \rangle_t - Z_t \equiv 0$ nach Satz 2.8. $\square$

2.3 Stochastisches Integral

Lemma 2.18. $H_t = \sum_{k \geq 1} \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ elementarer Integrand mit $\sup_{t \geq 0} |H_t| \leq c \in [0, \infty)$ f.s., $M \in \mathcal{M}_2^c$, dann ist $H \bullet M = \left(\int_0^t H dM \right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ und

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H dM \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \right], \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

(wobei $\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s$ realisierungsweise als Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert ist).

Beweis. $H \bullet M \in \mathcal{M}_2^c$ hatten wir bereits in Lemma 2.15 bewiesen.

Zu (2.10): Betr. zunächst $H_t = \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, d.h. H besitzt nur endlich viele Sprungstellen. Wie im Bew. von Lemma 2.15 ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dM\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\xi_k^2 (M_{t \wedge \tau_{k+1}} - M_{t \wedge \tau_k})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 (M_{t \wedge \tau_{k+1}} - M_{\tau_k})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 \underbrace{\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}}^2 - 2M_{t \wedge \tau_{k+1}} M_{\tau_k} + M_{\tau_k}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_k}\right]}_{=\mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_{k+1}}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_k}] - M_{\tau_k}^2}\right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{t > \tau_k\}} \xi_k^2 \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_{t \wedge \tau_{k+1}} - \langle M \rangle_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_k}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m \xi_k^2 (\langle M \rangle_{t \wedge \tau_{k+1}} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau_k})\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right],
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ Satz 2.12 / Def. 2.16 verwendet haben.

Der Beweis funktioniert genauso, wenn wir annehmen, dass es für jedes $T > 0$ ein deterministisches $m = m(T)$ gibt mit $\tau_m \geq T$ — was z.B. erfüllt ist, wenn wir a priori wissen, dass $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein festes $\delta > 0$ gilt (und eine Durchsicht der Beweise von Lemma 2.21 und Korollar 2.22) zeigt, dass die Klasse der elementaren Integranden mit dieser (Zusatz-)eigenschaft für unsere Zwecke genügt).

Für den allgemeinen Fall approximieren wir (wie im Beweis von Lemma 2.15) $H_t = \lim_{m \rightarrow \infty} H_t^{(m)}$ mit $H_t^{(m)} := \sum_{k=1}^m \xi_k \mathbf{1}_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(t)$.

Es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^{(m)})^2 d\langle M \rangle_s\right]$$

mit monotoner (oder auch mit dominierten) Konvergenz.

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^t H^{(m)} dM &\leq \sup_{0 \leq u \leq t, m \in \mathbb{N}} \int_0^u H^{(m)} dM = \sup_{0 \leq u \leq t, m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^m \xi_k (M_{u \wedge \tau_{k+1}} - M_{u \wedge \tau_k}) \\
&= \sup_{0 \leq u \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (M_{u \wedge \tau_{k+1}} - M_{u \wedge \tau_k}) = \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u H dM
\end{aligned}$$

und analog $\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^t -H^{(m)} dM \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u -H dM$, somit

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left| \int_0^t H^{(m)} dM \right|^2 \leq \left(\sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u H dM + \sup_{0 \leq u \leq t} \int_0^u -H dM \right)^2 \leq 4 \sup_{u \leq t} \left| \int_0^u H dM \right|^2,$$

nach Lemma 2.15 ist $(\int_0^t H dM)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$, nach Doobs $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung (Prop. 2.4, 2.) (und nochmals Lemma 2.15) gilt somit

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u \leq t} \left| \int_0^u H dM \right|^2\right] \leq 16 \mathbb{E}\left[\left| \int_0^t H dM \right|^2\right] \leq 16c^2 \mathbb{E}[M_t^2] < \infty,$$

demnach gilt mit dominierter Konvergenz:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H dM\right)^2\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H^{(m)} dM\right)^2\right].$$

□

Definition 2.19. Für progressiv messbares $(Y_t)_{t \geq 0}$, $T > 0$, $M \in \mathcal{M}_2^c$ sei

$$\begin{aligned} \|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2 &:= \mathbb{E}\left[\int_0^T Y_u^2 d\langle M \rangle_u\right], \\ \mathcal{L}(M) &:= \{Y \text{ progressiv messbar} : \|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2 < \infty \text{ für alle } T > 0\}. \end{aligned}$$

Bem. Sei μ_M auf $\Omega \times [0, \infty)$ definiert durch $\mu_M(A) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(\omega, t) d\langle M \rangle_t\right]$, so ist $\|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2$ die $\mathcal{L}^2$ -Norm von $(Y_t(\omega))_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich μ_M .

Beobachtung 2.20. Y progressiv messbar und beschränkt $\Rightarrow Y \in \mathcal{L}(M)$, insbesondere liegen beschränkte elementare Integranden in $\mathcal{L}(M)$ für jedes $M \in \mathcal{M}_2^c$.

Beweis. (Offensichtlich) □

Idee: Wir verwenden Lemma 2.21 und „ $\mathcal{L}^2$ -Isometrie“, um das (elementare) stochastische Integral (vgl. Def. 2.13) von den elementaren Integranden auf $\mathcal{L}(M)$ fortzusetzen.

Lemma 2.21. Sei $(A_t)_{t \geq 0}$ adaptierter Prozess mit stetigen, nicht-fallenden Pfaden, $A_0 = 0$ und $\mathbb{E}[A_t] < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zu jedem progressiv messbaren Prozess Y mit $\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_u^2 dA_u\right] < \infty$ für alle $T > 0$ gibt es eine Folge $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ von beschränkten elementaren Integranden mit

$$\sup_{T > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s^{(n)} - Y_s|^2 dA_s\right] = 0. \quad (2.11)$$

Beweis. 1) Sei Y beschränkt mit stetigen Pfaden, $T > 0$.

Setze $H_t^{(n)} := \sum_{k=0}^{\infty} Y_{k/2^n} \mathbf{1}_{(k/2^n, (k+1)/2^n]}(t)$ (dies ist ein beschr. elementarer Integrand), es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s^{(n)} - Y_s|^2 dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.12)$$

(dominierte Konvergenz, denn $H_s^{(n)} - Y_s \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ für jedes $s \geq 0$ und $|H_s^{(n)} - Y_s| \leq 2\|Y\|_\infty$).

2) Sei Y beschränkt (aber nicht notw. stetig; wir verwenden ggfs. eine geeign. Glättung von Y und approximieren dann diese).

Sei zunächst $T > 0$ fest, wir nehmen o.E. an

$$t \mapsto A_t \text{ ist strikt wachsend und bijektiv mit } A_t - A_s \geq t - s \quad (2.13)$$

(sonst gehe über zu $\tilde{A}_t := A_t + t$) und

$$Y_0 = 0, \quad Y_t = 0 \text{ für } t > T.$$

Sei $\tau_u := \inf\{t \geq 0 : A_t > u\}$, $u \geq 0$ die Inverse von $(A_t)_t$, es ist

$$\int_0^\infty f(t) dA_t = \int_0^\infty f(\tau_u) du \quad \text{für } f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ m.b.} \quad (2.14)$$

(denn für $f = \mathbf{1}_{(a,b]}$ ist die linke S. = $A_b - A_a$, die rechte S. = $\lambda(\{u : a < \tau_u \leq b\}) = A_b - A_a$, dann approximiere allg. nicht-neg. messbares f mittels Linearkombinationen solcher Stufenfunktionen, etc.)

Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$G_t^{(m)} := m \int_{\tau_{A_t - 1/m}}^t Y_s dA_s, \quad t \geq 0$$

(dies ist eine “geglättete” Version von Y), es ist

$$|G_t^{(m)}| \leq m \|Y\|_\infty (A_t - A_{\tau_{A_t - 1/m}}) = m \|Y\|_\infty (A_t - (A_t - \frac{1}{m})) = \|Y\|_\infty,$$

d.h. $G^{(m)}$ ist beschränkt, $t \mapsto G_t^{(m)}$ ist stetig.

Zeige: $G^{(m)}$ ist adaptiert:

$$\tau_{A_t - 1/m} = \inf\{u \geq 0 : A_u > A_t - \frac{1}{m}\} \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-m.b.,}$$

$(\int_0^t Y_s dA_s)_{t \geq 0}$ ist adaptiert.

Für $s \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} G_{\tau_s}^{(m)} &= m \int_{\tau_{A_{\tau_s} - 1/m}}^{\tau_s} Y_u dA_u = m \int_0^\infty \mathbf{1}(\tau_{s-1/m} < u \leq \tau_s) Y_u dA_u \\ &\stackrel{(2.14)}{=} m \int_0^\infty \mathbf{1}(\tau_{s-1/m} < \tau_u \leq \tau_s) Y_{\tau_u} du = m \int_{(s-1/m)^+}^s Y_{\tau_u} du \end{aligned}$$

demnach gilt (realisierungsweise) $G_{\tau_s}^{(m)} \rightarrow Y_{\tau_s}$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$ für $m \rightarrow \infty$ und

$$\int_0^\infty (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s = \int_0^\infty (G_{\tau_s}^{(m)} - Y_{\tau_s})^2 ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

somit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

(verwende dominierte Konvergenz).

Nach 1) gibt es beschr. elementare Integranden $H^{(m,\ell)}$, $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m,\ell)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

wähle $\ell_m \nearrow \infty$, so dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m,\ell_m)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] = 0$, so leistet die Folge von elementaren Integranden $H^{(m)} := H^{(m,\ell_m)}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} 2\mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{(m)} - G_s^{(m)})^2 dA_s\right] + \lim_{m \rightarrow \infty} 2\mathbb{E}\left[\int_0^T (G_s^{(m)} - Y_s)^2 dA_s\right] = 0 \end{aligned}$$

(d.h. die Formel (2.12) gilt für dieses Y und diesen Zeithorizont T).

3) Zeige: Lemma 2.21 gilt für beschr., progr. m.b. Y . Nach 2) gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ einen beschränkten, elementaren Integranden $H^{(n)}$ mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (H_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] \leq \frac{1}{n},$$

die Folge $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ leistet das Gewünschte: (2.11) gilt.

4) Sei Y unbeschränkt, setze $Y_t^{(n)} := Y_t \mathbf{1}_{\{|Y_t| \leq n\}}$, es gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^n Y_s^2 \mathbf{1}_{\{|Y_s| \leq n\}} dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(dominierte Konvergenz). Approximiere $Y^{(n)}$ mit $H^{(n)}$ wie in 3), so dass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \leq \frac{1}{n},$$

dann gilt auch

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - Y_s)^2 dA_s\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^n (Y_s^{(n)} - H_s^{(n)})^2 dA_s\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(d.h. die Existenz einer approximierenden Folge von beschränkten elementaren Integranden, die (2.11) erfüllen, gilt allgemein). $\square$

Korollar 2.22. Für $M \in \mathcal{M}_2^c$ definiert

$$\|Y\|_{\mathcal{L}(M)} := \sum_{T \in \mathbb{N}} 2^{-T} (\|Y\|_{\mathcal{L}(M;T)} \wedge 1)$$

eine Metrik auf $\mathcal{L}(M)$, bezüglich der

$$\mathcal{L}_0 := \{H : H \text{ beschr. elementarer Integrand}\}$$

dicht liegt.

Beweis. Verwende Lemma 2.21 mit $A_t = \langle M \rangle_t$. $\square$

Beobachtung 2.23.

$$(\mathcal{L}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(M)}) \ni H \mapsto H \bullet M \in (\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_2^c})$$

ist eine Isometrie (mit $(\mathcal{L}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(M)})$ aus Kor. 2.22, $H \bullet M$ aus Def. 2.13, $(\mathcal{M}_2^c, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_2^c})$ aus Satz 2.9), insbesondere gilt

$$(H^{(n)})_n \subset \mathcal{L}_0 \text{ Cauchy-Folge} \quad \Rightarrow \quad (H^{(n)} \bullet M)_n \subset \mathcal{M}_2^c \text{ Cauchy-Folge.}$$

Beweis. Für jedes $T > 0$ ist $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H dM\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 d\langle M \rangle_s\right] = \|H\|_{\mathcal{L}(M;T)}^2$ nach Lemma 2.18. $\square$

Satz 2.24. Sei $M \in \mathcal{M}_2^c$. Für $X \in \mathcal{L}(M)$ gibt es einen (bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutigen) Prozess $X \bullet M \in \mathcal{M}_2^c$ mit der Eigenschaft

$$\forall \{H^{(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}_0 \text{ mit } \|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 : \|H^{(n)} \bullet M - X \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$X \bullet M$ heißt das stochastische Integral von X bezüglich M , man schreibt auch $(X \bullet M)_t = \int_0^t X dM = \int_0^t X_s dM_s$.

Beweis. Kor. 2.22 zeigt, dass es mindestens eine X approximierende Folge von elementaren Integranden $H^{(n)}$ gibt, die demnach eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(M)$ ist. Wegen Beob. 2.23 und Vollständigkeit von $\mathcal{M}_2^c$ konvergiert $H^{(n)} \bullet M$ in $\mathcal{M}_2^c$ (und wir nennen ihren Grenzwert $X \bullet M$).

Zur Wohldefiniertheit: Sei $\tilde{H}^{(n)} \in \mathcal{L}_0$, $n \in \mathbb{N}$ eine weitere Folge mit $\|\tilde{H}^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$, so gilt $\|H^{(n)} - \tilde{H}^{(n)}\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$, also auch $\|H^{(n)} \bullet M - \tilde{H}^{(n)} \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} = \|(H^{(n)} - \tilde{H}^{(n)}) \bullet M\|_{\mathcal{M}_2^c} \rightarrow 0$. $\square$

Proposition 2.25 (Eigenschaften des stochastischen Integrals). Für $M \in \mathcal{M}_2^c$, $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ gilt

1. $\int_0^0 X dM = 0$

2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_0^t aX_s + bY_s dM_s = a \int_0^t X_s dM_s + b \int_0^t Y_s dM_s, \quad t \geq 0$$

3. Mit $\int_s^t X dM := \int_0^t X dM - \int_0^s X dM$ gilt für $s \leq t$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X dM\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

4. $\left\langle \int_0^\cdot X dM \right\rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u$

5. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X dM\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u\right]$

Beweis. 1., 2. ✓ (Entspr. gilt für Approximanten $H \in \mathcal{L}_0$, Übung)

3. Sei $H^{(n)} \in \mathcal{L}_0$ mit $\|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$, dann gilt insbes. $\int_0^t H^{(n)} dM \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \int_0^t X dM$ für jedes $t \geq 0$.

Sei $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{1}_A \left(\int_s^t X dM\right)^2\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\mathbf{1}_A \left(\int_s^t H^{(n)} dM\right)^2\right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\mathbf{1}_A \int_s^t (H_u^{(n)})^2 d\langle M \rangle_u\right] = E\left[\mathbf{1}_A \int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u\right] \end{aligned}$$

denn $\|H^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \rightarrow 0$ n. Vor.

4. Sei $s < t$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X dM\right)^2 - \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t X dM\right)^2 - \int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right]}_{=0 \text{ nach 3.}} - 2 \int_0^s X dM \times \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_s^t X dM \middle| \mathcal{F}_s\right]}_{=0, \int_0^\cdot X dM \text{ ist Martingal}} \\ &\quad + \left(\int_0^s X dM\right)^2 - \int_0^s X_u^2 d\langle M \rangle_u, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_0^t X dM \right)^2 - \int_0^t X_u^2 d\langle M \rangle_u \Big|_{t \geq 0} \text{ ist Martingal}$$

(und die weiteren in Satz 2.12 / Def. 2.16 geforderten Eigenschaften (adaptiert, stetige, nicht-fallend Pfade, Start in 0) sind offensichtlich erfüllt).

5. ✓ (Z.B. nehme Erwartungswert in 3.) □

Wie die folgende Proposition zeigt, ist „pfadweises“ Denken ist wenigstens entlang Stoppzeiten erlaubt:

Proposition 2.26. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}(M)$, $T ((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ -Stoppzeit, dann gilt f.s.

$$\int_0^{t \wedge T} X dM = (X \bullet M)_{t \wedge T} = ((X \mathbf{1}_{[0, T]}) \bullet M)_t = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0, T]}(s) dM_s \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(Das erste und das dritte Gleichheitszeichen sind (nur) notationelle Identitäten, das zweite Gleichheitszeichen ist die eigentliche Aussage.)

Beobachtung 2.27. Für $N \in \mathcal{M}_2^c$ mit $N_0 = 0$, $t \geq 0$ gilt

$$\langle N \rangle_t = 0 \text{ f.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(N_s = 0 \text{ für alle } s \leq t) = 1.$$

Beweis. Für $s \leq t$ ist auch $\langle N \rangle_s = 0$ f.s. ($\langle N \rangle$ hat nicht-fallende Pfade), also $\mathbb{E}[N_s^2] = \mathbb{E}[N_0^2] + \mathbb{E}[\langle N \rangle_s] = 0$, d.h. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{s \leq t, s \in \mathbb{Q}_+} \{N_s = 0\}\right) = 1$, Beh. folgt mit Pfadstetigkeit. □

Beweis von Prop. 2.26. Setze $\tilde{X}_t := X_t \mathbf{1}_{[0, T]}(t)$, es ist $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ und

$$(X \bullet M)_{t \wedge T} - (\tilde{X} \bullet M)_t = ((X - \tilde{X}) \bullet M)_{t \wedge T} - ((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T}) \quad (2.15)$$

(Linearität des stoch. Integrals, Prop. 2.25, 2.)

Für bel. (beschränkte) Stoppzeiten $S \leq T$, $Y \in \mathcal{L}(M)$ gilt

$$\mathbb{E}\left[\left((Y \bullet M)_{t \wedge T} - (Y \bullet M)_{t \wedge S}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge S}^{t \wedge T} Y_u^2 d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_S\right] \quad (2.16)$$

$((Y \bullet M)_t^2 - \int_0^t Y_u^2 d\langle M \rangle_u)$ ist ein Martingal gem. Prop. 2.25, 4, wende darauf den Satz vom optionalen Stoppen an).

Für (festes) $s \leq t$ ist

$$\mathbb{E}\left[\left(((X - \tilde{X}) \bullet M)_{t \wedge T} - ((X - \tilde{X}) \bullet M)_{s \wedge T}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{s \wedge T}\right] \stackrel{(2.16)}{=} \mathbb{E}\left[\int_{s \wedge T}^{t \wedge T} \underbrace{(X_u - \tilde{X}_u)^2}_{=0 \text{ da } u \leq T} d\langle M \rangle_u \middle| \mathcal{F}_{s \wedge T}\right] = 0,$$

d.h. $((X - \tilde{X}) \bullet M)_{\cdot \wedge T} \in \mathcal{M}_2^c$ mit quadrat. Var. $\equiv 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(((X - \tilde{X}) \bullet M)_{t \wedge T} = 0 \text{ für alle } t \geq 0) = 1 \quad (\text{mit Beob. 2.27}).$$

Weiter ist

$$\mathbb{E}\left[\left((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t \wedge T}^t \tilde{X}_u^2 d\langle M \rangle_u\right] = 0 \quad (\text{denn } \tilde{X}_u = 0 \text{ für } u > T)$$

wobei wir für das erste Gleichheitszeichen (2.16) mit Ersetzungen $S \leftarrow t \wedge T, T \leftarrow t$ verwendet haben, also (zusammen mit Stetigkeit der Pfade)

$$\mathbb{P}\left((\tilde{X} \bullet M)_t - (\tilde{X} \bullet M)_{t \wedge T} = 0 \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1.$$

Insgesamt: Beide Terme auf der rechten Seite von (2.15) sind $\equiv 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit. $\square$

Korollar 2.28. $M \in \mathcal{M}_2^c, X, Y \in \mathcal{L}(M), T$ Stoppzeit mit $X \mathbf{1}_{[0, T]} = Y \mathbf{1}_{[0, T]}$ (d.h. X und Y stimmen auf $[0, T]$ überein), dann gilt f.s.

$$\int_0^t X dM = \int_0^t Y dM \quad \text{für alle } t \leq T.$$

Beweis. F.s. gilt

$$\int_0^{t \wedge T} X dM \stackrel{(*)}{=} \int_0^t X \mathbf{1}_{[0, T]} dM = \int_0^t Y \mathbf{1}_{[0, T]} dM \stackrel{(*)}{=} \int_0^{t \wedge T} Y dM \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

wobei wir für $(*)$ jeweils Prop. 2.26 verwendet haben. $\square$

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, wir schreiben

$$|\langle M, N \rangle|_t := V_t(\langle M, N \rangle) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_k=t} \sum_{i=1}^k |\langle M, N \rangle_{t_i} - \langle M, N \rangle_{t_{i-1}}| \quad (2.17)$$

für die Totalvariation von $\langle M, N \rangle$ (als Prozess in $t \geq 0$).

Satz 2.29 (Kunita-Watanabe-Ungleichung¹). *Seien $M, N \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}(M), Y \in \mathcal{L}(N)$, dann gilt f.s.*

$$\int_0^t |X_s Y_s| d|\langle M, N \rangle|_s \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \right)^{1/2} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Beweis. F.s. gilt

$$\forall t \geq 0, \lambda \in \mathbb{Q} : \langle M + \lambda N \rangle_t = \langle M \rangle_t + 2\lambda \langle M, N \rangle_t + \lambda^2 \langle N \rangle_t,$$

insbes. gilt f.s. (mit Notation $\langle \cdot \rangle_s^t := \langle \cdot \rangle_t - \langle \cdot \rangle_s$)

$$\forall 0 \leq s \leq t, \lambda \in \mathbb{Q} : \langle M \rangle_s^t + 2\lambda \langle M, N \rangle_s^t + \lambda^2 \langle N \rangle_s^t \geq 0 \quad (2.18)$$

und somit auch f.s.

$$\forall 0 \leq s \leq t : |\langle M, N \rangle_s^t| \leq \left(\langle M \rangle_s^t \right)^{1/2} \left(\langle N \rangle_s^t \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \langle M \rangle_s^t + \frac{1}{2} \langle N \rangle_s^t \quad (2.19)$$

¹Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.* 30, 209–245, (1967)

(für die erste Ungl. verwende (2.18) und die Beob., dass ax^2+bx+c die Lösungen $-\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{D}$ mit $D := b^2-4ac$ („Diskriminante“) besitzt, wenn $a > 0$ so muss $D \leq 0$ sein, damit $\inf_{x \in \mathbb{Q}} \{ax^2 + bx + c\} \geq 0$ gilt; für die zweite Ungl. verwende $2ab \leq a^2 + b^2$).

Demnach gibt es $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ so dass für $\omega \in \Omega_0$ gilt

$$\int \mathbf{1}_A(s) d|\langle M, N \rangle|_s \leq \frac{1}{2} \int \mathbf{1}_A(s) d\langle M \rangle_s + \frac{1}{2} \int \mathbf{1}_A(s) d\langle N \rangle_s =: \nu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

d.h. als Maße auf $\mathbb{R}_+$ aufgefasst sind $d|\langle M, N \rangle|$ (und offensichtlich auch $d\langle M \rangle, d\langle N \rangle$) absolut stetig bezgl. $d\nu$.

Nach Satz von Radon-Nikodým ([Kl, Kor. 7.34]) gibt es (für $\omega \in \Omega_0$) Dichten $f_u^M, f_u^N, f_u^{M,N}$, $u \geq 0$ so dass

$$\forall 0 \leq s \leq t : \langle M \rangle_s^t = \int_s^t f_u^M \nu(du), \quad \langle N \rangle_s^t = \int_s^t f_u^N \nu(du), \quad \langle M, N \rangle_s^t = \int_s^t f_u^{M,N} \nu(du).$$

Wegen (2.18) gilt für ν -f.a. $s \geq 0$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : f_s^M + 2\lambda f_s^{M,N} + \lambda^2 f_s^N \geq 0 \quad (2.20)$$

(zunächst für $\lambda \in \mathbb{Q}$, da die linke S. als Funktion von λ stetig ist, gilt die Aussage auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}$).

Wähle $\lambda_s (= \lambda_s(\omega)) := \gamma |Y_s| |X_s|^{-1} \mathbf{1}_{\{X_s \neq 0\}}$ (mit $\gamma \in \mathbb{R}$), also gilt f.s. (multipliziere (2.20) mit X_s^2)

$$X_s^2 f_s^M + 2\gamma |X_s| |Y_s| f_s^{M,N} + \gamma^2 Y_s^2 f_s^N \geq 0 \quad \text{für } \nu\text{-f.a. } s \geq 0 \text{ und alle } \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

(zunächst wieder für alle $\gamma \in \mathbb{Q}$, dann Stetigkeitsargument) und (2.21) bleibt richtig, wenn man $f_s^{M,N}$ durch $|f_s^{M,N}|$ ersetzt ((2.21) gilt für γ und für $-\gamma$).

Integriere (2.21) mit ν über $(0, t]$:

$$\mathbb{P}\text{-f.s. gilt : } \forall \gamma \in \mathbb{R} : \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s + 2\gamma \int_0^t |X_s Y_s| d|\langle M, N \rangle|_s + \gamma^2 \int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \geq 0,$$

ein „Diskriminantenargument“ wie oben liefert Beh. □

Satz 2.30 (Martingalcharakterisierung des stoch. Integrals (im $\mathcal{L}^2$ -Fall)). *Sei $M \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}(M)$. Das stochastische Integral $X \bullet M$ ist das (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige Martingal $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\Phi_0 = 0$ und*

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{f.s.}$$

für jedes $N \in \mathcal{M}_2^c$.

Beweis. Für $H, K \in \mathcal{L}_0$, $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ gilt f.s.

$$\langle H \bullet M, K \bullet N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s, \quad t \geq 0. \quad (2.22)$$

(Übung: Dazu genügt es nach Kor. 2.17 zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t H dM\right)\left(\int_s^t K dN\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u K_u d\langle M, N \rangle_u \middle| \mathcal{F}_s\right]$$

f.s. für $s \leq t$ gilt.)

Seien X, M, N wie in den Vor., zeige: $\Phi_t := \int_0^t X dM$ erfüllt die Behauptung.

Wähle $\mathcal{L}_0 \ni X^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ mit $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}(M)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gemäß Kor. 2.22).

Fixiere $T > 0$, wähle Teilfolge $\tilde{X}^{(k)} = X^{(n_k)}$ mit $\int_0^T |\tilde{X}_u^{(k)} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ f.s. (wegen $\mathbb{E}[\int_0^T |X_u^{(n)} - X_u|^2 d\langle M \rangle_u] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist dies mit Borel-Cantelli möglich).

Für $M, N \in \mathcal{M}_2^c$ gilt

$$(\langle M, N \rangle_t)^2 \leq (|\langle M, N \rangle_t|)^2 \leq \langle M \rangle_t \langle N \rangle_t$$

(verwende Satz 2.29 mit $X = Y \equiv 1$), also für $t \leq T$

$$\begin{aligned} |\langle \int_0^\cdot \tilde{X}^{(k)} dM - \int_0^\cdot X dM, N \rangle_t|^2 &\leq \langle \int_0^\cdot \tilde{X}^{(k)} - X dM \rangle_t \langle N \rangle_t \\ &= \int_0^t (\tilde{X}_u^{(k)} - X_u)^2 d\langle M \rangle_u \times \langle N \rangle_t \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mit (2.22) für $H = \tilde{X}^{(k)}, Y = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \int_0^\cdot \tilde{X}^{(k)} dM, N \rangle_t &= \int_0^t \tilde{X}_s^{(k)} d\langle M, N \rangle_s \\ &= \int_0^t X_s d\langle M, N \rangle_s + \int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s) d\langle M, N \rangle_s \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Die linke Seite konvergiert n. obigem für $k \rightarrow \infty$ f.s. gegen $\langle \int_0^\cdot X dM, N \rangle_t$, wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s) d\langle M, N \rangle_s \right| &\leq \int_0^t |\tilde{X}_s^{(k)} - X_s| d|\langle M, N \rangle_s| \\ &\leq \left(\int_0^t (\tilde{X}_s^{(k)} - X_s)^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} (\langle N \rangle_t)^{1/2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(verwende Satz 2.29 für die zweite Ungleichung) konvergiert die rechte S. gegen $\int_0^t X_s d\langle M, N \rangle_s$. Da $T > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt die Beh.

Zur Eindeutigkeit: Habe $\tilde{\Phi} \in \mathcal{M}_2^c$ ebenfalls die geforderten Eigenschaften, dann ist

$$\langle \tilde{\Phi} - \int_0^\cdot X dM, N \rangle_t \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

für jedes $N \in \mathcal{M}_2^c$, insbesondere mit $N_t := \tilde{\Phi}_t - \int_0^t X dM$ ist

$$\langle \tilde{\Phi} - \int_0^\cdot X dM \rangle_t \equiv 0 \quad \text{f.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}_t - \int_0^t X dM \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

mit Beob. 2.27. □

Korollar 2.31. Seien $M, \tilde{M} \in \mathcal{M}_2^c, X \in \mathcal{L}(M), \tilde{X} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Es gilt

$$1. \quad \langle \int_0^\cdot X dM, \int_0^\cdot \tilde{X} d\tilde{M} \rangle_t = \int_0^t X_s \tilde{X}_s d\langle M, \tilde{M} \rangle_s \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ f.s.}$$

2. Sei T eine Stoppzeit mit $X_{t \wedge T} = \tilde{X}_{t \wedge T}, M_{t \wedge T} = \tilde{M}_{t \wedge T}$ für alle $t \geq 0$ f.s., so gilt f.s.

$$\int_0^{t \wedge T} X dM = \int_0^{t \wedge T} \tilde{X} d\tilde{M}, \quad t \geq 0.$$

Bem. Aussage 2. verstärkt Kor. 2.28 – dort wurde nur der Integrand “geändert”, nicht auch das M .

Beweis. 1. Mit Satz 2.30 ist

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^\cdot X dM, \widetilde{M} \right\rangle_t &= \int_0^t X_s d\langle M, \widetilde{M} \rangle_s, \\ \left\langle \int_0^\cdot X dM, \int_0^\cdot \widetilde{X} d\widetilde{M} \right\rangle_t &= \int_0^t \widetilde{X}_s d\langle \widetilde{M}, \int_0^\cdot X dM \rangle_s = \int_0^t X_s \widetilde{X}_s d\langle M, \widetilde{M} \rangle_s.\end{aligned}$$

2. Für $N \in \mathcal{M}_2^c$ ist

$$\langle M - \widetilde{M}, N \rangle_{t \wedge T} \equiv 0 \quad \text{f.s.}$$

(für eine Stoppzeit τ ist stets $\langle M_{\cdot \wedge \tau} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$, denn $M_{t \wedge \tau}^2 - \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$ ist ein Martingal [verwende optional stopping]).

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^\cdot X dM - \int_0^\cdot \widetilde{X} d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} &\stackrel{\text{Kor. 2.28}}{=} \left\langle \int_0^\cdot X dM - \int_0^\cdot X d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} \\ &= \left\langle \int_0^\cdot X dM, N \right\rangle_{t \wedge T} - \left\langle \int_0^\cdot X d\widetilde{M}, N \right\rangle_{t \wedge T} = \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle M, N \rangle_r - \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle \widetilde{M}, N \rangle_r \\ &= \int_0^{t \wedge T} X_r d\langle M - \widetilde{M}, N \rangle_r = 0.\end{aligned}$$

Insbes. gilt für $N_t := \int_0^{t \wedge T} X dM - \int_0^{t \wedge T} \widetilde{X} d\widetilde{M} : (N_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ mit $\langle N \rangle_t \equiv 0 \Rightarrow N_t \equiv 0$ (f.s.) gem. Beob. 2.27. □

Literaturverzeichnis

- [Du] R. Durrett, Stochastic calculus : a practical introduction, CRC Press, 1996.
- [EK] S.N. Ethier, T.G. Kurtz, Markov processes: characterization and convergence, Wiley, 1986.
- [Ka] O. Kallenberg, Foundations of modern probability, 2nd ed., Springer, 2002.
- [KS] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, 2nd ed., Springer, 1991.
- [Kl] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., Springer 2020.
- [LG] J.-F. Le Gall, Brownian motion, martingales, and stochastic calculus, Springer, 2016.
- [MP10] P. Mörters, Y. Peres, Brownian motion, Cambridge University Press, 2010.
- [Ø] B. Øksendal, Stochastic differential equations, 6th ed., Springer, 2003.
- [Pr] P. Protter, Stochastic integration and differential equations, 2nd ed., Springer, 2005.
- [RY] D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, 3rd ed., Springer, 1999.
- [RW] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov processes and martingales, Band I und II, Wiley, 1994.
- [St2] M. Birkner, Notizen zur Stochastik II, JGU Mainz, WS 2024/25.
- [St1-24] M. Birkner, Notizen zur Stochastik I, JGU Mainz, SS 2024.