Übungen zur Stochastik II **WS 2011/2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 1

Aufgabe 1.1 a) Sei $n \geq 2$, seien $X_1, \dots, X_n$ austauschbare, quadratintegrierbare reelle ZVn. Dann gilt stets

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geq -\frac{1}{n-1} \mathrm{Var}(X_1).$$

Können Sie ein Beispiel angeben, in dem Gleichheit gilt?

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ austauschbare, quadratintegrierbare reelle ZVn. Dann gilt $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$.

Aufgabe 1.2 Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ein Beispiel einer austauschbaren Familie von n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, die *nicht* zu einer unendlichen Familie $X_1, X_2, \dots$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 1.3 Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $R_n := \{S_n = 0\}$. Stets gilt

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} R_n\big) \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 1.4 Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}_+$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $G := \{S_j < j \text{ für } j = 1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\big(G \,\big|\, S_n\big) \geq (1 - S_n/n)^+$$

(und es gilt Gleichheit, wenn die X_i nur Werte aus $\{0, 1, 2\}$ annehmen).

Abgabe der Aufgaben: Keine