Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 2

Aufgabe 2.1 (Pólyas Urne) In einer Urne befinden sich anfangs M schwarze und $N-M$ weiße (und ansonsten ununterscheidbare) Kugeln ($M, N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$). In jedem Zug wird rein zufällig eine der Kugeln aus der Urne gezogen und dann zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe wieder zurückgelegt, nach n Zügen befinden sich also $N+n$ Kugeln in der Urne. Sei

$$X_n := \mathbf{1}(n\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}),$$

$S_n := M + X_1 + \cdots + X_n$ die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne nach n Zügen.

a) Zeigen Sie: $X_1, X_2, \dots$ sind nicht unabhängig, aber austauschbar.

[*Hinweis*: Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ für $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ und dann $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ durch sukzessive Anwendung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.]

b) Warum existiert

$$Z := \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{N+n} \quad \text{f.s. und in } \mathcal{L}^1?$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z^k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Die Beta-Verteilung $\beta_{a,b}$ mit Parametern $a, b > 0$ hat Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Für welche Wahl von a, b (in Abhängigkeit von M, N) stimmen die Momente von Z mit denen von $\beta_{a,b}$ überein?

Aufgabe 2.2 Zeigen Sie: Jede symmetrische Funktion $f : E^n \to \mathbb{R}$ kann als Funktion der empirischen Verteilung aufgefasst werden, d.h. es gibt eine Funktion $g : \mathcal{M}_1(E) \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = g\big(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\big) \qquad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n.$$

Aufgabe 2.3 Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. reellwertig mit $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ und $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)^2 \longrightarrow 2\sigma^2 \quad \text{f.s. und in } \mathcal{L}^1.$$

(Was ergibt sich, wenn Sie anstelle von Unabhängigkeit Austauschbarkeit der X_i annehmen?)

Aufgabe 2.4 (Wright-Fisher-Modell) Sei $N \in \mathbb{N}$, für $t = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N$ seien $\xi_{t,i}$ u.i.v. uniform$(\{1, \dots, N\})$. Seien $(X_{0,i})_{i=1,\dots,N}$ austauschbar mit Werten in $\{0, 1\}$ (und unabhängig von $\xi_{\cdot,\cdot}$), und für $t = 1, 2, \dots$

$$X_{t,i} := X_{t-1,\xi_{t,i}},\ i = 1, \dots, N,$$

$\mathcal{F}_t := \sigma(\xi_{s,i}, 1 \le s \le t, 1 \le i \le N) \vee \sigma(X_{0,i}, 1 \le i \le N)$.

a) Für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist $(X_{t,i})_{i=1,\dots,N}$ austauschbar.

b) Sei $Y_t := (X_{t,1} + X_{t,2} + \cdots + X_{t,N})/N$ und $\tau := \min\{t : Y_t = 0 \text{ oder } Y_t = 1\}$.
$(Y_t)_t$ ist ein Martingal (bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$) und τ, die Auftreffzeit in $\{0, 1\}$, ist f.s. endlich. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y_\tau = 1)$.

Aufgabe 2.5* Sei $(\mathcal{F}_n)_n$ Filtration, $X = (X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ Martingal, es gelte $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ für alle n. Der Prozess

$$\langle X\rangle_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}], \quad n = 1, 2, \dots \qquad (\,\langle X\rangle_0 := 0\,)$$

heißt (prävisible) quadratische Variation von X.

a) $(\langle X\rangle_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ist prävisibel mit nicht-fallenden Pfaden, und $X_n^2 - X_0^2 - \langle X\rangle_n$ ist ein Martingal. Insbesondere ist $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[\langle X\rangle_n]$.

b) Es gilt

$$\big\{\langle X\rangle_n \text{ konvergiert}\big\} \subset \big\{X_n \text{ konvergiert}\big\} \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis*: Für $K > 0$ ist $\tau_K := \min\{n : \langle X\rangle_{n+1} \ge K\}$ eine Stoppzeit und es gilt $\langle X\rangle_{n\wedge\tau_K} \le K$. Folglich ist $(X_{n\wedge\tau_K})_{n=0,1,\dots}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}[(X_{n\wedge\tau_K})^2] \le K + \mathbb{E}[X_0^2] < \infty$ für alle n. Verwenden Sie (ohne Beweis), dass ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes Martingal stets konvergiert. Weiter gilt offenbar $\{\tau_K = \infty\} \subset \{X_{n\wedge\tau_K} = X_n \text{ für alle } n\}$.]

c) Es gelte darüberhinaus $|X_{n+1} - X_n| \le c$ für eine feste Konstante $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\big\{X_n \text{ konvergiert}\big\} \subset \big\{\langle X\rangle_n \text{ konvergiert}\big\} \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis*: Für $L > 0$ ist $\sigma_L := \min\{n : |X_n| \ge L\}$ eine Stoppzeit und $|X_{n\wedge\sigma_L}| \le L + c$ für alle n. Folgern Sie wie in b) dass $\sup_n \mathbb{E}[\langle X\rangle_{n\wedge\sigma_L}] < \infty$ und demnach $\{\sup_n \langle X\rangle_{n\wedge\sigma_L} < \infty\}$ f.s.]

d) (Bedingtes Borel-Cantelli-Lemma) Seien $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse mit $A_n \in \mathcal{F}_n$. Zeigen Sie:

$$\big\{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\big\} = \limsup_{n\to\infty} A_n \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis*: Betrachten Sie das Martingal $X_n = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathbf{1}_{A_i} - \mathbb{P}(A_i|\mathcal{F}_{i-1})\big)$.]

Abgabe der Aufgaben: Keine