Übungen zur Stochastik II **WS 2011/2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 3

Aufgabe 3.1 Wir betrachten verschiedene Funktionenräume, die wir jeweils mit der Supremumsnorm versehen. Zeigen Sie:

1. $C([0,1])$ ist separabel (d.h. enthält eine abzählbare, dichte Teilmenge).
2. $C_b([0,\infty))$ ist nicht separabel.
3. $C_c([0,\infty))$ und $C_0([0,\infty)) := \{f \in C([0,\infty)),\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ sind separabel.

Aufgabe 3.2 a) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, $\mu := \lambda|_{[0,1]}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das Einheitsintervall. Zeigen Sie: $\mu = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$.

b) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n = \mathcal{N}(0,n)$ die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz n, ν_1 das 0-Maß (d.h. $\nu_1(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), $\nu_2 = \lambda$ das Lebesgue-Maß. Zeigen Sie: $\mu_n \xrightarrow{\text{v}} \nu_1$, aber (μ_n) konvergiert nicht schwach, sowie $\sqrt{2\pi n}\mu_n \xrightarrow{\text{v}} \nu_2$.

Aufgabe 3.3 Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n geometrisch verteilt mit Erfolgsparameter $p_n \in (0,1)$ (d.h. $\mathbb{P}(X_n = k) = p_n(1-p_n)^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$). Unter welchen Bedingungen an die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\mathcal{L}(X_n/n) \xrightarrow{\text{w}} \text{Exp}(\alpha)$ für $\alpha > 0$?

Aufgabe 3.4 Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Exp(1), setze $M_n := \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Die *Gumbel-Verteilung* Gu (nach Emil J. Gumbel, 1891–1966, benannt) hat die Verteilungsfunktion $y \mapsto \exp(-e^{-y}), y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $M_n - \log n$ konvergiert in Verteilung gegen Gu.

[*Hinweis*: $\mathbb{P}(M_n \le a) = \mathbb{P}(X_1 \le a)^n$.]

Abgabe der Aufgaben: Keine