Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 4

Aufgabe 4.1 a) Seien $g, g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$ nicht-negativ mit $\int g\, d\lambda = \int g_n\, d\lambda = 1$ für alle n, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$g_n \to g \;\; \lambda\text{-fast überall} \qquad \Longrightarrow \qquad g_n\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} g\lambda.$$

b) Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = z) = \mathbb{P}(X = z).$$

Aufgabe 4.2 Eine Familie $(\mu_i)_{i\in I} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ist genau dann straff, wenn es eine messbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ gibt mit $\lim_{||x||\to\infty} \varphi(x) = \infty$ und $\sup_{i\in I} \int \varphi\, d\mu_i < \infty$.

Aufgabe 4.3 Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$ mit $m_P := \int x\, P(dx) \in (0,\infty)$ definiert

$$\widehat{P}(A) := \frac{1}{m_P} \int_A x\, P(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widehat{P}(A) \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$, die sogenannte *größenverzerrte* Verteilung von P.

Seien $(X_i)_{i\in I}$ nicht-negative Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = 1$ für alle $i \in I$, $P_i := \mathcal{L}(X_i)$. Zeigen Sie:

$$\big\{\widehat{P}_i : i \in I\big\} \text{ straff} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big\{X_i : i \in I\big\} \text{ gleichgradig integrierbar.}$$

Aufgabe 4.4 (Die Prohorov-Metrik metrisiert die Topologie der schwachen Konvergenz.) Sei (E,d) metrischer Raum, für $B \subset F$, $\varepsilon > 0$ sei $B^\varepsilon := \{y \in F : d(y,B) < \varepsilon\}$. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E)$ sei

$$d_P(\mu,\nu) := \inf\big\{\varepsilon > 0 : \mu(F) \le \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \;\text{ für } F \subset E \text{ abgeschlossen}\big\} \;(\ge 0).$$

Zeigen Sie:

a) d_P ist eine Metrik, d.h.

i) $d_P(\mu,\nu) = d_P(\nu,\mu)$

ii) $d_P(\mu,\nu) = 0$ g.d.w. $\mu = \nu$

iii) $d_P(\nu,\nu') \le d_P(\nu,\mu) + d_P(\mu,\nu')$

b) Sei E zusätzlich vollständig und separabel, dann gilt $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu \iff d_P(\mu_n,\mu) \to 0$.

[*Hinweise*: a) Beachten Sie: $E \setminus F^\varepsilon$ ist abgeschlossen und $(E \setminus F^\varepsilon)^\varepsilon \subset E \setminus F$; die abgeschlossenen Teilmengen sind ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$; für $\varepsilon, \delta > 0$ ist $\overline{F^\varepsilon}^\delta = F^{\varepsilon+\delta}$.
b) Verwenden Sie das Portmanteau-Theorem; für „$\Rightarrow$“ benutzen Sie auch, dass eine schwach konvergente Folge straff ist.]

Abgabe der Aufgaben: Keine