Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 5

Aufgabe 5.1 a) Sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable mit $\varphi_X = \overline{\varphi_X}$, dann haben X und $-X$ dieselbe Verteilung.

b) Seien X und Y unabhängige, $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen mit $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X + Y$, dann gilt $Y = 0$ f.s.

Aufgabe 5.2 a) Die Gamma-Verteilung $\Gamma_{r,\lambda}$ mit Formparameter $r > 0$ und Skalenparameter $\lambda > 0$ hat Dichte $\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Sei X $\Gamma_{r,\lambda}$-verteilt, zeigen Sie:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1 - it/\lambda)^r}.$$

Folgern Sie weiter: Sei Y $\Gamma_{s,\lambda}$-verteilt und unabhängig von X, so hat $X + Y$ die Verteilung $\Gamma_{r+s,\lambda}$ (d.h. die Gammaverteilungen bilden eine sogenannte Faltungshalbgruppe).

b) Die Cauchy-Verteilung Cau_a, $a > 0$ hat Dichte

$$\frac{1}{a\pi} \frac{1}{1 + (x/a)^2} \qquad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Für Cau_a-verteiltes X gilt $\varphi_X(t) = \exp(-a|t|)$. Demnach ist $X + Y$ Cau_{a+b}-verteilt, wenn Y Cau_b-verteilt und unabhängig von X ist.

Aufgabe 5.3 a) Zeigen Sie: $\mu_1 := \mathrm{Unif}[-a, a]$, die uniforme Verteilung auf $[-a, a]$ hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_1}(t) = \sin(at)/at$, die Dreiecksverteilung $\mu_2 := \mathrm{Tri}_a$ mit Dichte $\frac{1}{b}(1 - |x|/b)^+$ (für ein $b > 0$) hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_2}(t) = 2\frac{1-\cos(bt)}{b^2t^2}$. Die Verteilung μ_3 mit Dichte $\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(bx)}{bx^2}$ auf $\mathbb{R}$ (manchmal Pólyas Verteilung genannt) hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_3}(t) = (1 - |t|/b)^+$.

[*Hinweis.* Sie können die Dreiecksverteilung als Faltung von zwei uniformen Verteilungen darstellen.]

b) Seien $X_1, \dots, X_n$ reelle Zufallsvariablen, A u.a. von $(X_1, \dots, X_n)$ mit $\mathbb{P}(A = i) = p_i$, $i = 1, \dots, n$ ($p_i \geq 0$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$), so gilt für $Y := X_A$

$$\varphi_Y(t) = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_{X_i}(t).$$

c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine symmetrische Funktion mit $f(0) = 1$, so dass der Graph von $f|_{[0,\infty)}$ ein konvexer Polygonzug mit endlich vielen „Knickstellen“ ist. Dann gibt es eine reelle Zufallsvariable X mit $\varphi_X = f$.

[*Hinweis.* Stellen Sie f als geeignete Konvexkombination von endlich vielen Funktionen des Typs $(1 - |t|/b)^+$ dar.]

d) Folgern Sie *Pólyas Kriterium*: Für jede symmetrische Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(0) = 1$, die auf $[0, \infty)$ konvex ist, gibt es eine reelle Zufallsvariable X mit $\varphi_X = f$. Insbesondere ist $f(t) = \exp(-|t|^\alpha)$ für $\alpha \in (0, 1]$ eine charakteristische Funktion.

b.w.

Aufgabe 5.4 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} f(t_i - t_j) \geq 0.$$

Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion φ_μ eines endlichen Maßes μ auf $\mathbb{R}^d$ ist positiv semidefinit.

[*Bericht.* Der Satz von Bochner zeigt, dass diese Eigenschaft die Menge der charakteristischen Funktionen charakterisiert.]

Aufgabe 5.5* (Der Satz von de Finetti via Straffheit der Familie der empirischen Verteilungen) Sei E ein polnischer Raum. Für $x = (x_1, x_2, \dots) \in E^{\mathbb{N}}$ sei

$$\xi_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \quad \in \mathcal{M}_1(E).$$

Sei weiterhin

$$\mu_{n,k}(x) := \xi_n(x)^{\otimes k} = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \delta_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}, \quad \nu_{n,k}(x) := \frac{1}{(n)_k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 1 \\ \text{paarw. versch.}}}^{n} \delta_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}$$

(k-faches Ziehen mit und ohne Zurücklegen aus $\{x_1, \dots, x_n\}$).

a) Zeigen Sie: Für beschränktes $F : E^k \to \mathbb{R}$ gilt

$$\Big| \int F(y_1, \dots, y_k)\, \mu_{n,k}(x)(dy_1, \dots, dy_k) - \int F(y_1, \dots, y_k)\, \nu_{n,k}(x)(dy_1, \dots, dy_k) \Big| \leq ||F||_\infty \frac{k(k-1)}{2n}.$$

b) Sei weiter $X = (X_1, X_2, \dots)$ austauschbar, die X_i nehmen Werte in E an. $\mathcal{M}_1(E)$, die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf E, ausgestattet mit der schwachen Topologie, ist ein separabler metrischer Raum (vgl. Aufg. 4.4), insbesondere können wir also die $\mathcal{M}_1(E)$-wertigen Zufallsvariablen $\xi_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, betrachten.

Zeigen Sie: $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$ ist straff, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, C \subset E \text{ kompakt} : \sup_{Q \in \mathcal{K}} Q\big(\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(E \setminus C) > \varepsilon\}\big) < \varepsilon.$$

Folgern Sie: Die Familie $\mathcal{L}\big(\xi_n(X)\big)$ ist straff.

c) Seien $f_1, f_2, \dots : E \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Warum gilt für jeden Limespunkt $\Xi_\infty = \text{(w-)}\lim_{j \to \infty} \xi_{n_j}(X)$ längs einer Teilfolge (n_j)

$$\mathbb{E}\big[f_1(X_1) \cdots f_k(X_k)\big] = \mathbb{E}\Big[\int_{E^k} f_1(y_1) \cdots f_k(y_k)\, \Xi_\infty^{\otimes k}(dy_1, \dots, dy_k)\Big] \text{ ?}$$

Folgern Sie: $\xi_n(X)$ konvergiert für $n \to \infty$ f.s. bezüglich der schwachen Topologie gegen ein Ξ_∞, und gegeben Ξ_∞ sind $X_1, X_2, \dots$ verteilt wie unabhängige Züge aus ξ_∞.

Abgabe der Aufgaben: Keine