**Übungen zur Stochastik II** **WS 2011/2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 6

---

**Aufgabe 6.1** a) Sei $X$ eine $\mathbb{Z}^d$-wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi_X$. Dann hat $\varphi_X$ Periode $2\pi\mathbb{Z}^d$, d.h. $\varphi_X(t+2\pi m) = \varphi_X(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{Z}^d$. Für $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle} \varphi_X(t)\, dt.$$

b) Sei $X$ eine reelle wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi_X$. $X$ heißt gitterverteilt, wenn es $a, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Es gilt

$$X \text{ gitterverteilt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \neq 0 \,:\, |\varphi_X(u)| = 1.$$

**Aufgabe 6.2** Sei $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion $\varphi_\mu$ und es gelte $\varphi_\mu \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ (wobei $\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dann hat $\mu$ eine stetige beschränkte Dichte $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\mu(t)\, dt.$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall der Normalverteilung, $\mathcal{N}(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dann $\mu_\varepsilon := \mu * \mathcal{N}(0,\varepsilon)$. Zeigen Sie, dass $\mu_\varepsilon$ eine Dichte $f_\varepsilon$ besitzt, die punktweise gegen $f$ konvergiert.]

**Aufgabe 6.3** a) Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ gemeinsam $n$-dimensional normalverteilt, $1 \le m < n$. Dann gilt

*i)* $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \neq j \le n$, und

*ii)* $(Y_1, \ldots, Y_m)$ unabhängig von $(Y_{m+1}, \ldots, Y_n)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \le m < j \le n$.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\overline{M} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ihr empirisches Mittel und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M})^2$ die (korrigierte) Stichprobenvarianz. Dann sind $\overline{M}$ und $S^2$ unabhängig.

[*Hinweis.* Betrachten Sie den zufälligen Vektor $(\overline{M}, X_1 - \overline{M}, X_2 - \overline{M}, \ldots, X_n - \overline{M})$.

**Aufgabe 6.4** Sei $\Pi_n$ eine uniform verteilte Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ und $S_n$ die Anzahl Zyklen von $\Pi_n$ (d.h. die Anzahl der Orbits von $\Pi_n$, als Selbstabbildung von $\{1, \ldots, n\}$ aufgefasst). Zeigen Sie:

$$\frac{S_n}{\log n} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

[*Hinweis.* Sei $A_{n,\ell} := \big\{(\Pi_n)^m(\ell) \ge \ell \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\big\}$ das Ereignis, dass $\ell$ die kleinste Zahl in dem Zyklus ist, der $\ell$ enthält, $X_{n,\ell} := \mathbf{1}(A_{n,\ell})$. Zeigen Sie zunächst:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n} \text{ sind unabhängig mit } \mathbb{P}(X_{n,\ell} = 1) = 1/\ell.$$

Hierzu kann es hilfreich sein, sich $\Pi_n$ auf folgende Weise generiert zu denken: Die Zahlen $1, \ldots, n$ betreten in aufsteigender Reihenfolge ein zunächst leeres Restaurant mit vielen runden Tischen, 1 setzt sich an einen der Tische. Seien bereits $1, \ldots, \ell - 1$ angekommen. Dann setzt sich $\ell$ rechts von $k$ an den Tisch, an dem $k$ sitzt, wenn es ein $k < \ell$ gibt mit $\Pi_n(k) = \ell$. Wenn es kein solches $k$ gibt, setzt sich $\ell$ an einen neuen, bisher freien Tisch. Die Anzahl Zyklen ist dann die Anzahl der besetzten Tische, nachdem $n$ Platz genommen hat.]

---

**Abgabe der Aufgaben:** Keine