Übungen zur Stochastik II **WS 2011/2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 8

Aufgabe 8.1 Bestimmen Sie das kanonische Tripel der Gamma-Verteilung $\Gamma_{r,\lambda}$ (deren Dichte $\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ist).

[*Hinweis.* Es genügt, $r = 1 = \lambda$ zu betrachten (warum?).]

Aufgabe 8.2 Sei $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2}\, dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und F für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} 2\big(1 - \Phi(1/\sqrt{x})\big)\,, & \text{für } x > 0, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: F ist die Verteilungsfunktion einer strikt stabilen Verteilung μ zum Index $1/2$, insbesondere ist μ unendlich teilbar.

[*Hinweis.* Bestimmen Sie die Dichte von F und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte die Gestalt $\lambda \mapsto e^{-\sqrt{2\lambda}}$ hat.]

Aufgabe 8.3 Sei μ unendlich teilbar mit kanonischem Tripel (b, σ^2, ν). Dann gilt

$$\nu = \operatorname*{v-lim}_{n\to\infty} n\mu^{*\frac{1}{n}}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

[*Hinweis.* Stellen Sie $\mu^{*\frac{1}{n}}$ wie in der Vorlesung als Verteilung von

$$b/n + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z + X_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})$$

dar. Schätzen Sie $\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{k=m}^{\infty}(X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})\Big| \geq \varepsilon\Big)$ beispielsweise mittels der Chebyshev-Ungleichung ab und verwenden Sie $\mathbb{P}\big(|Z| \geq z\big) \leq z^{-4}\mathbb{E}[Z^4] = 3/z^4$.]

Aufgabe 8.4 Seien X, X', X'' u.i.v. und es gelte $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X' + X'')/\sqrt{2}$. Dann ist $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für ein $\sigma^2 \geq 0$.

Aufgabe 8.5* (Lévy-Khinchin-Formel im nicht-negativen Fall) a) Sei $\mu \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$ unendlich teilbar. Zeigen Sie: Dann gibt es $\alpha \geq 0$ und ein σ-endliches Maß ν auf $(0,\infty)$ mit $\int_{(0,\infty)} (x \wedge 1)\, \nu(dx) < \infty$, so dass

$$-\log\Big(\int e^{-\lambda x}\, \mu(dx)\Big) = \alpha t + \int \big(1 - e^{-tx}\big)\nu(dx), \quad t \geq 0 \qquad (*)$$

gilt.

[*Hinweis.* Approximieren Sie μ mittels geeigneten CPoi_{ν_n} analog zum in der Vorlesung behandelten Fall.]

b) Seien α und ν wie in a) gegeben, dann gibt es ein unendlich teilbares $\mu \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$ mit Log-Laplacetransformierter $(*)$.

[*Hinweis.* Sie können μ als Verteilung der Summe der Konstante α und einer f.s. konvergenten Reihe von positiven compound Poisson-Zufallsvariablen gewinnen.]

Abgabe der Aufgaben: Keine