Übungen zur Stochastik II WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 10

Aufgabe 10.1 Sei E höchstens abzählbar, $p = (p_{x,y})_{x,y\in E}$ stochastische Matrix, d.h. $p_{x,y} \geqslant 0$ und $\sum_{y\in E} p_{x,y} = 1$ für alle $x \in E$. Für eine beschränkte Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ sei $Pf : E \to \mathbb{R}$ definiert durch $Pf(x) := \sum_{y\in E} p_{x,y} f(y)$.

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette auf E mit Übergangsmatrix p, $f : E \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist unter jedem $\mathbb{P}_x$, $x \in E$, der Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $M_0 := 0$,

$$M_n := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \big(Pf - f\big)(X_k), \quad n \in \mathbb{N}$$

ein Martingal (bezüglich $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$).

b) Es gilt auch die Umkehrung: Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in E und einer Familie von Verteilungen $\mathbb{P}_x$, $x \in E$ mit $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$, so dass unter jedem $\mathbb{P}_x$ für jedes beschränkte $f : E \to \mathbb{R}$ obiges $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist. Dann ist X eine Markovkette mit Übergangsmatrix p.

Aufgabe 10.2 (Galton-Watson-Prozess als Markovkette) Sei $q = (q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N}_0)$, seien $Y_{t,i}$, $t, i \in \mathbb{N}_0$ u.i.v. mit $\mathbb{P}(Y_{1,1} = \ell) = q_\ell$. Mit gegebenem Z_0 mit Werten in $\mathbb{N}_0$ sei $Z_t := \sum_{i=1}^{Z_{t-1}} Y_{t-1,i}$ für $t = 1, 2, \ldots$.

a) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix. Geben Sie im Fall $q = \mathrm{Poi}(\lambda)$ eine explizite Formel an.

b) Es sei $m := \sum_\ell \ell q_\ell = 1$. Zeigen Sie: Dann gilt für jedes $Z_0 = z \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ f.s.

[*Hinweis.* Zeigen Sie bspw. mit Aufg. 10.1, dass (Z_n) ein Martingal ist, und verwenden Sie dann den Martingalkonvergenzsatz.]

c) Wir setzen $g_1(s) := g(s) := \sum_{\ell=0}^{\infty} s^\ell q_\ell$, $g_n(s) := \big(g_{n-1} \circ g\big)(s)$, $s \in [0, 1]$. Zeigen Sie: $\mathbb{E}_1\big[s^{Z_n}\big] = g_n(s)$.

Sei $p_{\mathrm{ext}} := \mathbb{P}_1\big(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\big)$, dann ist p_{ext} die kleinste nicht-negative Lösung von $g(p) = p$. Wenn $m \in (1, \infty)$ (mit m aus Teil b)), so ist $p_{\mathrm{ext}} < 1$.

Aufgabe 10.3 (Wright-Fisher-Modell als Markovkette, vgl. Aufg. 2.4) Sei $N \in \mathbb{N}$, für $t = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$ seien $\xi_{t,i}$ u.i.v. uniform$(\{1, \ldots, N\})$, es seien $(X_{0,i})_{i=1,\ldots,N}$ beliebige Werte aus $\{0, 1\}$. Für $t = 1, 2, \ldots$ setze

$$X_{t,i} := X_{t-1,\xi_{t,i}}, \; i = 1, \ldots, N,$$

$\mathcal{F}_t := \sigma(\xi_{s,i}, 1 \leqslant s \leqslant t, 1 \leqslant i \leqslant N) \vee \sigma(X_{0,i}, 1 \leqslant i \leqslant N)$.

Zeigen Sie: $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $Z_t := \sum_{i=1}^N X_{t,i}$ ist eine Markovkette. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix. Können Sie auch $\mathbb{E}_z\big[\frac{2Z_t(N-Z_t)}{N(N-1)}\big]$ bestimmen? (Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig aus der t-ten Generation gezogene Individuen von verschiedenem Typ sind.)

Abgabe der Aufgaben: Keine