Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 12

Aufgabe 12.1 Es wird so lange eine faire Münze (mit Ausgängen Kopf und Zahl) geworfen, bis das Muster KKK oder das Muster ZKZ erscheint. Im ersten Fall gewinnt Spieler A, sonst Spieler B. Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten.

[*Hinweis.* Formulieren Sie die Frage beispielsweise als Auftreffproblem einer Markovkette.]

Aufgabe 12.2 (Wartezeitparadoxon, diskreter Fall) Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{N}$, es gelte $\mathrm{ggT}\{j : \mathbb{P}(\xi_1 = j) > 0\} = 1$ und $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Wir setzen $T_0 := 0$, $T_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$N_n := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : T_k \leqslant n\} \quad \text{und} \quad W_n := \xi_{N_n+1} \ \big(= \min\{T_k : T_k > n\} - \max\{T_k : T_k \leqslant n\}\big).$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n = \ell) = \frac{\ell}{\mathbb{E}[\xi_1]} \mathbb{P}(\xi_1 = \ell).$$

[*Hinweis.* Sei $X_n := \inf\{T_k - n : k \in \mathbb{N}_0, T_k \geqslant n\}$. $(W_n, X_n)_n$ ist eine Markovkette, bestimmen Sie die invariante Verteilung.]

Aufgabe 12.3 (Metropolis-Hastings-Ketten) Sei E endliche Menge, $\pi \in \mathcal{M}_1(E)$ mit $\pi(\{x\}) > 0$ für alle $x \in E$, $q = (q_{x,y})_{x,y\in E}$ irreduzible stochastische Matrix auf E mit der Eigenschaft $q_{x,y} > 0 \Leftrightarrow q_{y,x} > 0$. Dann definiert

$$p^{\mathrm{MH}}_{x,y} := \begin{cases} q_{x,y} \wedge \dfrac{\pi(\{y\})}{\pi(\{x\})} q_{y,x}\,, & y \neq x \\ 1 - \sum_{z\neq x} p^{\mathrm{MH}}_{x,z}\,, & y = x \end{cases}$$

eine irreduzible stochastische Matrix mit invarianter Verteilung π.

[*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst, dass p^{MH} *reversibel* bezüglich π ist, d.h. es gilt die sogenannte detaillierte Balancegleichung $\pi(\{x\})p^{\mathrm{MH}}_{x,y} = \pi(\{y\})p^{\mathrm{MH}}_{y,x}$.]

Aufgabe 12.4 Sei $N \in \mathbb{N}$ ungerade, $E = \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$, die stochastische Matrix p auf E gegeben durch $p_{i,i+1\,(\mathrm{mod}\,N)} = p_{i,i-1\,(\mathrm{mod}\,N)} = 1/2$.

a) p ist irreduzibel und aperiodisch mit invarianter Verteilung π, wo $\pi(\{x\}) = 1/N$ für $x \in E$.

b) p, aufgefasst als $N \times N$-Matrix, besitzt Eigenwerte

$$\lambda_k = \cos\big(\frac{2\pi k}{N}\big), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

und zugehörige (Links-)Eigenvektoren

$$x^{(k)} = \Big(1, \cos\big(\frac{2\pi k}{N}\big), \cos\big(2\frac{2\pi k}{N}\big), \dots, \cos\big((N-1)\frac{2\pi k}{N}\big)\Big)$$

[*Hinweis.* Zum Rechnen kann es angenehmer sein, zunächst die komplexwertigen Vektoren $(y^{(k)}_\ell)_{\ell=0,1,\dots,N-1}$ mit $y^{(k)}_\ell = \exp[(2\pi k\ell\, i)/N]$ (wo $i^2 = -1$) zu betrachten.]

c) Es gibt $C > 0$ und $0 < \gamma < 1$, so dass gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in E \ : \ \sum_{y\in E} \big|p^n_{x,y} - \pi(\{y\})\big| \leqslant C\gamma^n.$$

Können Sie das optimale γ bestimmen?

Abgabe der Aufgaben: Keine