Übungen zur Stochastik II **WS 2017/2018**

Blatt 1

Aufgabe 1.1 a) Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, die gemeinsame Verteilung $\mathscr{L}(X,Y)$ besitze die Dichte $\varphi_{X,Y}$ bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\lambda \otimes \lambda$ auf $\mathbb{R}^2$, d.h. $\mathbb{P}\big((X,Y) \in B)\big) = \int_B \varphi_{X,Y}(x,y)\,\lambda \otimes \lambda(dxdy)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Sei $\varphi_X(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X,Y}(x,y)\,\lambda(dy)$ die Marginaldichte von X. Wir setzen

$$\psi(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} y \frac{\varphi_{X,Y}(x,y)}{\varphi_X(x)}\,\lambda(dy) & \text{falls } \varphi_X(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Zufallsvariable $\psi(X)$ ist eine Version von $\mathbb{E}[Y|X]$.

b) Seien U, V unabhängig und jeweils uniform verteilt auf $[0,1]$.

i) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[U \mid \frac{U}{V}\right]$.

ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[U \mid U - V\right]$.

[*Hinweis*: Verwenden Sie die Dichtetransformationsformel, um die gemeinsame Dichte von $(U, U/V)$ bzw. von $(U, U-V)$ zubestimmen, dann wenden Sie a) an.]

Aufgabe 1.2 a) Seien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ σ-Algebren und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] + \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big)^2\big].$$

b) Sind X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$ und $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, dann gilt $X = Y$ f.s.

Aufgabe 1.3 Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ heißt (diskret) harmonisch, wenn gilt

$$h(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y\,:\,||y-x||_2 = 1} h(y) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{Z}^d$$

a) Sei $(S_n)_n$ die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ und $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie: $(h(S_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.

b) Sei $d \leq 2$, $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach unten beschränkt. Zeigen Sie: Dann h ist konstant.

[*Hinweis*: Sie dürfen verwenden, dass (S_n) für $d \leq 2$ rekurrent ist. Wenden Sie den Martingalkonvergenzsatz auf das Martingal aus a) an.]

Aufgabe 1.4 Sei $p \in [0,1]$, wir betrachten einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $X_0 = x_0 \in [0,1]$ und folgender Dynamik:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, bedingt auf $X_0, X_1, \ldots, X_n$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 - p + pX_n & \text{mit W'keit } X_n \\ pX_n & \text{mit W'keit } 1 - X_n \end{cases}$$

Zeigen Sie: (X_n) ist ein Martingal und konvergiert f.s. Wie ist sein Grenzwert verteilt?

[*Hinweis*: Wenn X_n gegen X_∞ konvergiert, zeigen Sie, dass für jede Wahl $0 < a < b < 1$ gelten muss $\mathbb{P}(a < X_\infty < b) = 0$.]