Übungen zur Stochastik II $\hfill$ WS 2017/2018

Blatt 3

Aufgabe 3.1 a) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, $\mu := \lambda|_{[0,1]}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das Einheitsintervall. Zeigen Sie: $\mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n$.

b) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n = \mathcal{N}(0,n)$ die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz n, ν_1 das 0-Maß (d.h. $\nu_1(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), $\nu_2 = \lambda$ das Lebesgue-Maß. Zeigen Sie: $\mu_n \xrightarrow{\text{v}} \nu_1$, aber (μ_n) konvergiert nicht schwach, sowie $\sqrt{2\pi n}\,\mu_n \xrightarrow{\text{v}} \nu_2$.

Aufgabe 3.2 Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Exp(1), setze $M_n := \max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Die *Gumbel-Verteilung* Gu (nach Emil J. Gumbel, 1891–1966, benannt) hat die Verteilungsfunktion $y \mapsto \exp(-e^{-y}), y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $M_n - \log n$ konvergiert in Verteilung gegen Gu.
[*Hinweis*: $\mathbb{P}(M_n \le a) = \mathbb{P}(X_1 \le a)^n$.]

Aufgabe 3.3 a) Seien $g, g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$ nicht-negativ mit $\int g\, d\lambda = \int g_n\, d\lambda = 1$ für alle n, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$g_n \to g \;\; \lambda\text{-fast überall} \qquad \Longrightarrow \qquad g_n\lambda \xrightarrow{\text{w}} g\lambda.$$

b) Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = z) = \mathbb{P}(X = z).$$

Aufgabe 3.4 Eine Familie $(\mu_i)_{i\in I} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ist genau dann straff, wenn es eine messbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ gibt mit $\lim_{||x||\to\infty} \varphi(x) = \infty$ und $\sup_{i\in I} \int \varphi\, d\mu_i < \infty$.

Aufgabe 3.5 (Die Prohorov-Metrik metrisiert die Topologie der schwachen Konvergenz.) Sei (E,d) metrischer Raum, für $B \subset E$, $\varepsilon > 0$ sei $B^\varepsilon := \{y \in E : d(y,B) < \varepsilon\}$. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E)$ sei

$$d_P(\mu,\nu) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \mu(F) \le \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \;\text{ für alle abgeschlossenen } F \subset E\right\} \;\; (\ge 0).$$

Zeigen Sie:
a) d_P ist eine Metrik, d.h.

i) $d_P(\mu,\nu) = d_P(\nu,\mu)$

ii) $d_P(\mu,\nu) = 0$ g.d.w. $\mu = \nu$

iii) $d_P(\nu,\nu') \le d_P(\nu,\mu) + d_P(\mu,\nu')$

b) Sei E zusätzlich vollständig und separabel, dann gilt $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu \iff d_P(\mu_n,\mu) \to 0$.

[*Hinweise*: a) Beachten Sie: $E \setminus F^\varepsilon$ ist abgeschlossen und $(E \setminus F^\varepsilon)^\varepsilon \subset E \setminus F$; die abgeschlossenen Teilmengen sind ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$; für $\varepsilon, \delta > 0$ ist $\overline{F^\varepsilon}^\delta = F^{\varepsilon+\delta}$.
b) Verwenden Sie das Portmanteau-Theorem; für „⇒“ benutzen Sie auch, dass eine schwach konvergente Folge straff ist.]

b.w.

Aufgabe 3.6 (Skorohod-Kopplung im reellwertigen Fall) Seien $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit $\mu = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und darauf reelle Zufallsvariablen $X, X_1, X_2, \dots$ mit $\mathcal{L}(X) = \mu$, $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$ und $X_n \to X$ fast sicher.

[*Hinweis*: Sei F_n die Verteilungsfunktion von μ_n und $F_n^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq t\}$ deren (verallgemeinerte) Inverse. Sei U uniform auf $[0,1]$ verteilt, so ist $\mathcal{L}(F_n^{-1}(U)) = \mu_n$.]

Abgabe der Aufgaben: Keine