Übungen zur Stochastik II — WS 2017/2018

Blatt 4

Aufgabe 4.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *positiv semi-definit*, wenn gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} f(t_i - t_j) \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Die charakteristische Funktion φ_μ eines endlichen Maßes $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ ist positiv semi-definit.

[*Bericht.* Nach einem Satz von Bochner (siehe z.B. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Vol. 2) ist jede stetige und positiv semi-definite Funktion die charakteristische Funktion eines endlichen Maßes auf $\mathbb{R}^d$.]

Aufgabe 4.2 a) Sei X eine $\mathbb{Z}^d$-wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. Dann hat φ_X Periode $2\pi\mathbb{Z}^d$, d.h. $\varphi_X(t + 2\pi m) = \varphi_X(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{Z}^d$. Es gilt die Fourier-Inversionsformel

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle} \varphi_X(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt $\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\, dt = (2\pi)^d \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$.]

b) Sei X eine reelle wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. X heißt gitterverteilt, wenn es $a, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Es gilt

$$X \text{ gitterverteilt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \neq 0 \,:\, |\varphi_X(u)| = 1.$$

Aufgabe 4.3 Sei $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion φ_μ und es gelte $\varphi_\mu \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dann hat μ eine stetige beschränkte Dichte $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\mu(t)\, dt.$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall der Normalverteilung, $\mathcal{N}(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dann $\mu_\varepsilon := \mu * \mathcal{N}(0,\varepsilon)$. Zeigen Sie, dass μ_ε eine Dichte f_ε besitzt, die punktweise gegen f konvergiert.]

Aufgabe 4.4 Für $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion φ_μ und $-\infty < a < b < \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\mu(t)\, dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

[*Hinweis.* Die zentrale Beobachtung ist, dass

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}\, dt = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a))}{t}\, dt - \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-b))}{t}\, dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \pi\big(\mathbf{1}_{\{a\}} + 2\mathbf{1}_{(a,b)} + \mathbf{1}_{\{b\}}\big)(x)$$

gilt. Mit $\operatorname{sgn}(u) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u) - \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(u)$ für $u \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin(tu)}{t}\, dt = 2\operatorname{sgn}(u) \int_0^{T|u|} \frac{\sin(r)}{r}\, dr \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 2\operatorname{sgn}(u) \int_0^{\infty} \frac{\sin(r)}{r}\, dr = \pi \operatorname{sgn}(u)$$

Details finden sich beispielsweise in Section 2.3 des Buch von R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 2003.]

Aufgabe 4.5 Sei C eine symmetrische, reelle, positiv semidefinite $d \times d$-Matrix, $\mu \in \mathbb{R}^d$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ und A eine reelle $m \times d$-Matrix. Dann hat $Y := AX$ Verteilung $\mathcal{N}(A\mu, ACA^t)$.

Aufgabe 4.6 a) Seien $Y_1, \dots, Y_n$ gemeinsam n-dimensional normalverteilt, $1 \le m < n$. Dann gilt

i) $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \neq j \le n$, und

ii) $(Y_1, \dots, Y_m)$ unabhängig von $(Y_{m+1}, \dots, Y_n)$ $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \le m < j \le n$.

b) Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\overline{M} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ihr empirisches Mittel und $S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M})^2$ die (korrigierte) Stichprobenvarianz. Dann sind $\overline{M}$ und S^2 unabhängig.

[*Hinweis.* Betrachten Sie den zufälligen Vektor $(\overline{M}, X_1 - \overline{M}, X_2 - \overline{M}, \dots, X_n - \overline{M})$.]

Aufgabe 4.7 Sei Π_n eine uniform verteilte Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und S_n die Anzahl Zyklen von Π_n (d.h. die Anzahl der Orbits von Π_n, als Selbstabbildung von $\{1, \dots, n\}$ aufgefasst). Zeigen Sie:

$$\frac{S_n}{\log n} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

[*Hinweis.* Sei $A_{n,\ell} := \big\{(\Pi_n)^m(\ell) \ge \ell \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\big\}$ das Ereignis, dass ℓ die kleinste Zahl in dem Zyklus ist, der ℓ enthält, $X_{n,\ell} := \mathbf{1}(A_{n,\ell})$. Zeigen Sie zunächst:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n} \text{ sind unabhängig mit } \mathbb{P}(X_{n,\ell} = 1) = 1/\ell.$$

Hierzu kann es hilfreich sein, sich Π_n auf folgende Weise generiert zu denken: Die Zahlen $1, \dots, n$ betreten in aufsteigender Reihenfolge ein zunächst leeres Restaurant mit vielen runden Tischen, 1 setzt sich an einen der Tische. Seien bereits $1, \dots, \ell - 1$ angekommen. Dann setzt sich ℓ rechts von k an den Tisch, an dem k sitzt, wenn es ein $k < \ell$ gibt mit $\Pi_n(k) = \ell$. Wenn es kein solches k gibt, setzt sich ℓ an einen neuen, bisher freien Tisch. Die Anzahl Zyklen ist dann die Anzahl der besetzten Tische, nachdem n Platz genommen hat.]

Abgabe der Aufgaben: Keine