Blatt 5

Aufgabe 5.1 (Lokaler zentraler Grenzwertsatz) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. $\mathbb{Z}$-wertige ZVn mit $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, und es gelte

$$\mathrm{ggt}\big\{i - j : i, j \in \mathbb{Z}, \, \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_1 = j) > 0\big\} = 1.$$

a) Zeigen Sie: Dann gilt für $\varepsilon \in (0, \pi)$

$$\sup_{\varepsilon \le |t| \le \pi} |\varphi_{X_1}(t)| < 1.$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie, dass $|\varphi_{X_1}(t)| = 1$ impliziert, dass $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt.]

b) Sei weiter $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Dann gilt für jedes $K \in (0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}, |k - n\mu| \le K\sigma\sqrt{n}} \left| \sqrt{2\pi n\sigma^2}\, \mathbb{P}(S_n = k) - \exp\big(- (k - n\mu)^2/(2n\sigma^2)\big) \right| = 0.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die diskrete Fourier-Umkehrformel (vgl. Aufg. 4.2) und eine Taylorentwicklung von $\varphi_{X_1}(t)$ um $t = 0$. Verwenden Sie Teil a), um Beiträge zum Umkehrintegral ausserhalb einer geeignet gewählten Umgebung der 0 abzuschätzen.]

Aufgabe 5.2 a) Sei X eine reellwertige, unendlich teilbare ZV mit $\mathbb{P}(|X| \le K) = 1$ für ein $K \in (0, \infty)$. Dann ist X f.s. konstant.

b) Sei $\alpha > 2$. Es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$.

[*Hinweis.* Argumentieren Sie beispielsweise per Widerspruch: Nehmen Sie an, X hätte $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$, und bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von X.]

c) Seien X, X', X'' u.i.v. und es gelte $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X' + X'')/\sqrt{2}$. Dann ist $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für ein $\sigma^2 \ge 0$.

Aufgabe 5.3 Bestimmen Sie das kanonische Tripel der Gamma-Verteilung $\Gamma_{r,\lambda}$ (deren Dichte $\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ist).

[*Hinweis.* Es genügt, $r = 1 = \lambda$ zu betrachten (warum?).]

Aufgabe 5.4 Sei μ unendlich teilbar mit kanonischem Tripel (b, σ^2, ν). Dann gilt

$$\nu = \operatorname*{v-lim}_{n\to\infty} n\mu^{*\frac{1}{n}}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

[*Hinweis.* Stellen Sie $\mu^{*\frac{1}{n}}$ wie in der Vorlesung als Verteilung von

$$b/n + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z + X_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})$$

dar. Schätzen Sie $\mathbb{P}\Big(\Big| \sum_{k=m}^{\infty} (X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})\Big| \ge \varepsilon\Big)$ beispielsweise mittels der Chebyshev-Ungleichung ab und verwenden Sie $\mathbb{P}(|Z| \ge z) \le z^{-4}\mathbb{E}[Z^4] = 3/z^4$.]

Aufgabe 5.5 Sei $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und F für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} 2\big(1 - \Phi(1/\sqrt{x})\big)\,, & \text{für } x > 0, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: F ist die Verteilungsfunktion einer strikt stabilen Verteilung μ zum Index $1/2$, insbesondere ist μ unendlich teilbar.

[*Hinweis.* Bestimmen Sie die Dichte von F und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte die Gestalt $\lambda \mapsto e^{-\sqrt{2\lambda}}$ hat.]

Frohe Weihnachten 2017
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe der Aufgaben: Keine