Übungen und Ergänzungen zur Stochastik II **WS 2021/2022**

Prof. Dr. Matthias Birkner

Weihnachtsblatt

Aufgabe 1 a) Sei $n \geq 2$, seien $X_1, \dots, X_n$ austauschbare, quadratintegrierbare reelle ZVn. Dann gilt stets

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geq -\frac{1}{n-1}\mathrm{Var}(X_1).$$

Können Sie ein Beispiel angeben, in dem Gleichheit gilt?

b) Für eine unendliche austauschbare Folge quadratintegrierbarer reeller ZVn $X_1, X_2, X_3, \dots$ gilt $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$.

c) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ein Beispiel einer austauschbaren Familie von n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, die *nicht* zu einer unendlichen Familie $X_1, X_2, \dots$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 2 ("ballot theorem") Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}_+$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $G := \{S_j < j \text{ für } j = 1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\big(G \,\big|\, S_n\big) \geq (1 - S_n/n)^+$$

(und es gilt Gleichheit, wenn die X_i nur Werte aus $\{0, 1, 2\}$ annehmen).

[*Hinweis:* $Y_k := S_{-k}/(-k)$, $k = -n, -n+1, \dots, 1$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $\mathscr{F}_k = \sigma(S_{-k}, S_{-k+1}, \dots, S_n)$, $T := \inf\big\{k \in \{-n, -n+1, \dots, -1\} : Y_k \geq 1\big\} \wedge (-1)$ ist eine Stoppzeit. Mit $G := \{S_j < j \text{ for all } j = 1, \dots, n\}$ gilt $1_{G^c} \leq Y_T$, verwenden Sie dann das optional sampling-Theorem.

Im Fall $\mathbb{P}(X_1 \in \{0, 1, 2\}) = 1$ zeigen Sie, dass mit $\varrho := \max\{0 \leq j \leq n : S_j - j \geq 0\}$, $\{S_n - n < 0\} \subset \{S_\varrho - \varrho = 0\}$ f.s. gilt, folgern Sie $\{S_n - n < 0\} \cap G^c \subset \{Y_T = 1\}$ f.s.]

Aufgabe 3 (Asymptotik der Pólya-Urne) In einer Urne befinden sich anfangs M schwarze und $N - M$ weiße (und ansonsten ununterscheidbare) Kugeln ($M, N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$). In jedem Zug wird rein zufällig eine der Kugeln aus der Urne gezogen und dann zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe wieder zurückgelegt, nach n Zügen befinden sich also $N + n$ Kugeln in der Urne. Sei

$$X_n := \mathbf{1}(n\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}),$$

$S_n := M + X_1 + \cdots + X_n$ die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne nach n Zügen.

a) Zeigen Sie: $X_1, X_2, \dots$ sind nicht unabhängig, aber austauschbar.

[*Hinweis*: Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ für $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ und dann $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ durch sukzessive Anwendung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.]

b) Warum existiert

$$Z := \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{N + n} \quad \text{f.s. und in } \mathcal{L}^1?$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z^k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Die Beta-Verteilung $\beta_{a,b}$ mit Parametern $a, b > 0$ hat Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Für welche Wahl von a, b (in Abhängigkeit von M, N) stimmen die Momente von Z mit denen von $\beta_{a,b}$ überein? Und warum charakterisiert dies die Verteilung von Z?

Aufgabe 4 a) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, $\mu := \lambda|_{[0,1]}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das Einheitsintervall. Zeigen Sie: $\mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n$.

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Exp(1), setze $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Die *Gumbel-Verteilung* Gu (nach Emil J. Gumbel, 1891–1966, benannt) hat die Verteilungsfunktion $y \mapsto \exp(-e^{-y}), y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $M_n - \log n$ konvergiert in Verteilung gegen Gu.

[*Hinweis*: $\mathbb{P}(M_n \le a) = \mathbb{P}(X_1 \le a)^n$.]

Aufgabe 5 a) Seien $g, g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$ nicht-negativ mit $\int g \, d\lambda = \int g_n \, d\lambda = 1$ für alle n, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$g_n \to g \;\; \lambda\text{-fast überall} \qquad \Longrightarrow \qquad g_n\lambda \xrightarrow{\text{w}} g\lambda.$$

b) Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = z) = \mathbb{P}(X = z).$$

Aufgabe 6 (Die Prohorov-Metrik metrisiert die Topologie der schwachen Konvergenz.) Sei (E, d) metrischer Raum, für $B \subset E$, $\varepsilon > 0$ sei $B^\varepsilon := \{y \in E : d(y, B) < \varepsilon\}$. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E)$ sei

$$d_P(\mu, \nu) := \inf\big\{\varepsilon > 0 : \mu(F) \le \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle abgeschlossenen } F \subset E\big\} \;\; (\ge 0).$$

Zeigen Sie:

a) d_P ist eine Metrik, d.h.

i) $d_P(\mu, \nu) = d_P(\nu, \mu)$

ii) $d_P(\mu, \nu) = 0$ g.d.w. $\mu = \nu$

iii) $d_P(\nu, \nu') \le d_P(\nu, \mu) + d_P(\mu, \nu')$

b) Sei E zusätzlich vollständig und separabel, dann gilt $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu \iff d_P(\mu_n, \mu) \to 0$.

[*Hinweise*: a) Beachten Sie: $E \setminus F^\varepsilon$ ist abgeschlossen und $(E \setminus F^\varepsilon)^\varepsilon \subset E \setminus F$; die abgeschlossenen Teilmengen sind ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$; für $\varepsilon, \delta > 0$ ist $\overline{F^\varepsilon}^\delta = F^{\varepsilon+\delta}$.

b) Verwenden Sie das Portmanteau-Theorem; für „$\Rightarrow$“ benutzen Sie auch, dass eine schwach konvergente Folge straff ist.]

Aufgabe 7 (Skorohod-Kopplung im reellwertigen Fall) Seien $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit $\mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n$. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und darauf reelle Zufallsvariablen $X, X_1, X_2, \dots$ mit $\mathcal{L}(X) = \mu$, $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$ und $X_n \to X$ fast sicher.

[*Hinweis*: Sei F_n die Verteilungsfunktion von μ_n und $F_n^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \ge t\}$ deren (verallgemeinerte) Inverse. Sei U uniform auf $[0, 1]$ verteilt, so ist $\mathcal{L}(F_n^{-1}(U)) = \mu_n$.]

Aufgabe 8 Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$ mit $m_P := \int x\,P(dx) \in (0,\infty)$ definiert

$$\widehat{P}(A) := \frac{1}{m_P}\int_A x\,P(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widehat{P}(A) \in \mathcal{M}_1([0,\infty))$, die sogenannte *größenverzerrte* Verteilung von P.

Seien $(X_i)_{i\in I}$ nicht-negative Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = 1$ für alle $i \in I$, $P_i := \mathcal{L}(X_i)$. Zeigen Sie:

$$\big\{\widehat{P}_i : i \in I\big\} \text{ straff} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big\{X_i : i \in I\big\} \text{ gleichgradig integrierbar.}$$

Aufgabe 9 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *positiv semi-definit*, wenn gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i\overline{\alpha_j} f(t_i - t_j) \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}^d, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Die charakteristische Funktion φ_μ eines endlichen Maßes $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ ist positiv semi-definit.

[*Bericht.* Nach einem Satz von Bochner (siehe z.B. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Vol. 2) ist jede stetige und positiv semi-definite Funktion die charakteristische Funktion eines endlichen Maßes auf $\mathbb{R}^d$.]

Aufgabe 10 a) Seien X, X', X'' u.i.v. und es gelte $X \overset{\mathcal{D}}{=} (X'+X'')/\sqrt{2}$. Dann ist $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ für ein $\sigma^2 \geq 0$.

[*Hinweis.* Betrachten Sie die charakteristische Funktion φ_X.]

b) Sei $\alpha > 2$. Es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$.

[*Hinweis.* Argumentieren Sie beispielsweise per Widerspruch: Nehmen Sie an, X hätte $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$, und bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von X.]

Aufgabe 11 a) Sei X eine $\mathbb{Z}^d$-wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. Dann hat φ_X Periode $2\pi\mathbb{Z}^d$, d.h. $\varphi_X(t + 2\pi m) = \varphi_X(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{Z}^d$. Es gilt die Fourier-Inversionsformel

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\varphi_X(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt $\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\,dt = (2\pi)^d\mathbf{1}_{\{0\}}(x)$.]

b) Sei X eine reelle wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. X heißt gitterverteilt, wenn es $a, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Es gilt

$$X \text{ gitterverteilt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \neq 0 : |\varphi_X(u)| = 1.$$

Aufgabe 12 (Lokaler zentraler Grenzwertsatz) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. $\mathbb{Z}$-wertige ZVn mit $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, und es gelte

$$\mathrm{ggt}\big\{i - j : i,j \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_1 = j) > 0\big\} = 1.$$

a) Zeigen Sie: Dann gilt für $\varepsilon \in (0,\pi)$

$$\sup_{\varepsilon\leq|t|\leq\pi} |\varphi_{X_1}(t)| < 1.$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie, dass $|\varphi_{X_1}(t)| = 1$ impliziert, dass $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt.]

b) Sei weiter $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Dann gilt für jedes $K \in (0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}, |k-n\mu|\le K\sigma\sqrt{n}} \Big| \sqrt{2\pi n\sigma^2}\, \mathbb{P}(S_n = k) - \exp\big(- (k - n\mu)^2/(2n\sigma^2)\big) \Big| = 0.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die diskrete Fourier-Umkehrformel (vgl. Aufg. 11) und eine Taylorentwicklung von $\varphi_{X_1}(t)$ um $t = 0$. Verwenden Sie Teil a), um Beiträge zum Umkehrintegral ausserhalb einer geeignet gewählten Umgebung der 0 abzuschätzen.]

Aufgabe 13 Sei $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion φ_μ und es gelte $\varphi_\mu \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dann hat μ eine stetige beschränkte Dichte $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\mu(t)\, dt.$$

[*Hinweis.* Betrachten Sie zunächst den Fall der Normalverteilung, $\mathcal{N}(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dann $\mu_\varepsilon := \mu * \mathcal{N}(0, \varepsilon)$. Zeigen Sie, dass μ_ε eine Dichte f_ε besitzt, die punktweise gegen f konvergiert.]

Aufgabe 14 a) Seien $Y_1, \dots, Y_n$ gemeinsam n-dimensional normalverteilt, $1 \le m < n$. Dann gilt

i) $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \ne j \le n$, und

ii) $(Y_1, \dots, Y_m)$ unabhängig von $(Y_{m+1}, \dots, Y_n)$ $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \le i \le m < j \le n$.

b) Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\overline{M} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ihr empirisches Mittel und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M})^2$ die (korrigierte) Stichprobenvarianz. Dann sind $\overline{M}$ und S^2 unabhängig.

[*Hinweis.* Betrachten Sie den zufälligen Vektor $(\overline{M}, X_1 - \overline{M}, X_2 - \overline{M}, \dots, X_n - \overline{M})$.]

Aufgabe 15 Sei Π_n eine uniform verteilte Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und S_n die Anzahl Zyklen von Π_n (d.h. die Anzahl der Orbits von Π_n, als Selbstabbildung von $\{1, \dots, n\}$ aufgefasst). Zeigen Sie:

$$\frac{S_n}{\log n} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

[*Hinweis.* Sei $A_{n,\ell} := \big\{(\Pi_n)^m(\ell) \ge \ell \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\big\}$ das Ereignis, dass ℓ die kleinste Zahl in dem Zyklus ist, der ℓ enthält, $X_{n,\ell} := \mathbf{1}(A_{n,\ell})$. Zeigen Sie zunächst:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n} \ \text{ sind unabhängig mit } \ \mathbb{P}(X_{n,\ell} = 1) = 1/\ell.$$

Hierzu kann es hilfreich sein, sich Π_n auf folgende Weise generiert zu denken: Die Zahlen $1, \dots, n$ betreten in aufsteigender Reihenfolge ein zunächst leeres Restaurant mit vielen runden Tischen, 1 setzt sich an einen der Tische. Seien bereits $1, \dots, \ell - 1$ angekommen. Dann setzt sich ℓ rechts von k an den Tisch, an dem k sitzt, wenn es ein $k < \ell$ gibt mit $\Pi_n(k) = \ell$. Wenn es kein solches k gibt, setzt sich ℓ an einen neuen, bisher freien Tisch. Die Anzahl Zyklen ist dann die Anzahl der besetzten Tische, nachdem n Platz genommen hat.]

Frohe Weihnachten 2021 und einen guten Rutsch ins neue Jahr!