Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 0

Aufgabe 0.1 Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. $\sim$ Exp(1) und $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Können Sie Folgen $(d_n)_n \subset \mathbb{R}$ und $(c_n)_n \subset (0, \infty)$ finden, so dass $(M_n - d_n)/c_n$ für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine nicht-triviale Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ konvergiert? Falls ja, wie sieht die Grenzverteilung aus?

Falls Sie Lust haben, gehen Sie derselben Frage auch für den Fall standardnormalverteilter X_i nach.

[*Hinweis*: $\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)^n$.

(Zudem: Die Rechnung ist im Fall $X_i \sim \mathcal{N}_{0,1}$ deutlich aufwendiger.)]

Aufgabe 0.2 Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.v reellwertige Zufallsvariablen, $X_i \in \mathcal{L}^1$. Was ist

$$\mathbb{E}[X_i \mid X_1 + \cdots + X_n] = \,?$$

Aufgabe 0.3 Angenommen, Sie nehmen an folgendem Glücksspiel teil: Zu Beginn befindet sich ein Betrag von 100.000 Euro im Jackpot. Sie werfen nun (unter strenger Aufsicht des Spielleiters) wiederholt eine faire Münze; bei jedem Münzwurf wird das Kapital im Jackpot um 10% vermindert. Die Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal die gleiche Anzahl von „Kopf“ und „Zahl“ gefallen ist, woraufhin das Spiel beendet ist und Sie das verbliebene Kapital ausgezahlt bekommen. Wie hoch ist Ihr erwarteter Gewinn in diesem Spiel?

[*Hinweis*: Falls Sie Inspiration brauchen, finden Sie auf der Rückseite eine Anleitung.]

Aufgabe 0.4 a) Seien $X_1, X_2, \dots > 0$ unabhängige reelle Zufallsvariablen mit $X_i \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}[X_i] = 1$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $M_0 := 1$ und $M_n := X_1 X_2 \cdots X_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie:

$$M_\infty := \lim_{n\to\infty} M_n \quad \text{existiert fast sicher} \tag{1}$$

und es gilt $\mathbb{P}(M_\infty > 0) \in \{0, 1\}$.

(ii) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[M_\infty] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{X_i}\right] > 0 \tag{2}$$

Zudem: Wenn die Bedingung (2) erfüllt ist, so ist $M_\infty > 0$ f.s. und die Konvergenz in (1) gilt auch in $\mathcal{L}^1$, andernfalls ist $M_\infty = 0$ f.s. und $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] > 0$.

[*Hinweis*: (i) Die Folge $(M_n)_n$ ist ein Martingal, das Ereignis $\{M_\infty > 0\}$ ist terminal.

(ii) Betrachten Sie das Martingal $\widetilde{M}_n := \frac{\sqrt{X_1}}{a_1} \cdots \frac{\sqrt{X_n}}{a_n}$ mit $a_n := \mathbb{E}\left[\sqrt{X_i}\right]$ ($\leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X_i]} = 1$ gemäß Jensen-Ungleichung), um folgendermaßen zu argumentieren: Falls $\prod_{i=1}^{\infty} a_i > 0$ gilt, so ist die Familie $\{\widetilde{M}_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{L}^2$-beschränkt; mittels Doobs $\mathcal{L}^2$-Ungleichung folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{M_n / \prod_{i=1}^{n} a_i\} \in \mathcal{L}^1$. Im Fall $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = 0$ verwenden Sie $M_n = \widetilde{M}_n^2 \big(\prod_{i=1}^{n} a_i\big)^2$.]

b) Auf $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit Produkt-σ-Algebra sei $\mathbb{P} = \mathrm{Ber}(1/2)^{\otimes\mathbb{N}}$ und $\mathbb{Q} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ber}((1+\varepsilon_i)/2)$ mit $|\varepsilon_i| < 1$. Dann ist $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$.

[*Hinweis*: Was hat das mit Teil a) zu tun?

(Zudem: es handelt sich um einen Spezialfall von Kakutanis Kriterium für Äquivalenz von Produktmaßen.)]

Eine *Anleitung zu Aufgabe 0.4*: Fassen Sie das Spiel als einfache symmetrische Irrfahrt $(S_n)_n$ auf $\mathbb{Z}$ mit Start in $S_0 = 0$ auf. Es seien

$$r_n := \mathbb{P}(S_n = 0), \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

die Rückkehrwahrscheinlichkeit zur 0 nach n Schritten sowie

$$b_0 := 0, \qquad b_n := \mathbb{P}(S_n = 0,\, S_k \neq 0 \text{ für } 0 < k < n), \quad n \in \mathbb{N}$$

die Wahrscheinlichkeit, nach genau n Schritten zum ersten Mal zur 0 zurückzukehren. Mit $R(s)$ bzw. $B(s)$ seien die Erzeugendenfunktionen der Folgen $(r_n)_n$ bzw. $(b_n)_n$ bezeichnet, also

$$R(s) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n r_n, \qquad B(s) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n b_n, \qquad |s| < 1.$$

(i) Berechnen Sie r_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Wie verhält sich r_n für $n \to \infty$? Zeigen Sie, dass

$$R(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \qquad |s| < 1.$$

(ii) Zeigen Sie, dass zwischen den beiden Erzeugendenfunktionen die Beziehung

$$R(s) = \frac{1}{1 - B(s)}$$

besteht. Folgern Sie, dass

$$B(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}, \qquad |s| < 1$$

und leiten Sie hieraus eine Formel für die b_n her. Wie verhält sich b_n für $n \to \infty$?

[*Hinweis:* Zerlegen Sie das Ereignis $\{S_n = 0\}$ nach der Anzahl m der Besuche in 0 im Zeitintervall $\{1, \dots, n\}$.]

(iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das oben beschriebene Spiel in endlicher Zeit endet? Wie lange muss man im Mittel auf das Spielende (und damit auf die Auszahlung des Gewinns) warten?

(iv) Beantworten Sie die eingangs gestellte Frage nach dem erwarteten Gewinn.